

Studentove t-testy

Beáta Stehlíková
Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
FMFI UK Bratislava

Jednovýberový t-test

- Máme náhodný výber z normálneho rozdelenia s neznámymi parametrami
- Chceme testovať hypotézu, že stredná hodnota sa rovná zadanej konštante.
- Intuícia:
Hypotézu zamietneme, ak sa priemer bude príliš líšiť od testovanej strednej hodnoty

Jednovýberový t-test

- Vypočítame hodnotu štatistiky

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{N}}$$

kde S je výberová štandardná odchýlka a N je počet dát

- Nulovú hypotézu zamietame, ak je štatistika v absolútnej hodnote väčšia ako kvantil t rozdelenia s $N-1$ stupňami voľnosti

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Česká antropologie - časopis vydávaný Českou antropologickou společností
- Konkrétne jeden z článkov z roku 2014:

Somatický profil probandů baletního souboru Brna a Olomouce
Somatic profile in ballet dancers from Brno a Olomouc
Monika Cinařová, Miroslava Přidalová



Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Index telesnej hmotnosti (body mass index, BMI):

$$\text{BMI} = \frac{m}{h^2},$$

kde

- m — telesná hmotnosť v kilogramoch
- h — telesná výška v metroch

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- V článku:

vala priemerná hmotnosť 70,2 kg a výška 177,8 cm. Priemerné hodnoty BMI byly u žen na hranici normální hmotnosti a podváhy, u mužů se pohybovaly v oblasti normální hmotnosti. Metabolismus žen odpovídal 1286,8 kcal a u mužů 1727,4 kcal

- Spomínaná hraničná hodnota je 18,50 (WHO, World Health Organization):

Classification	BMI(kg/m ²)	
	Principal cut-off points	Additional cut-off points
Underweight	<18.50	<18.50
Severe thinness	<16.00	<16.00
Moderate thinness	16.00 - 16.99	16.00 - 16.99
Mild thinness	17.00 - 18.49	17.00 - 18.49
Normal range	18.50 - 24.99	18.50 - 22.99
		23.00 - 24.99

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Máme teda tvrdenie o BMI hranici 18,50:

vala priemerná hmotnosť 70,2 kg a výška 177,8 cm. Priemerné hodnoty BMI byly u žen na hranici normální hmotnosti a podváhy, u mužů se pohybovaly v oblasti normální hmotnosti. Me-

- Štatisticky: ak budeme testovať hypotézu, že stredná hodnota BMI je 18,50, tak
 - pre mužov by sme ju mali zamietnuť
 - pre ženy by sme ju nemali zamietnuť

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- V článku máme dáta pre 17 mužov a 30 žien:

Tabulka 1. Základní statistické charakteristiky vybraných somatických parametrů

Parametr	Muži		Ženy	
	M	SD	M	SD
Věk (v letech)	23,1	3,3	23,8	3,6
Hmotnost (kg)	70,2	6,9	50,4	4,3
Tělesná výška (cm)	177,8	6,4	164,4	4,6
BMI (kg/m ²)	22,2	1,2	18,6	1,3
BMR (kcal)	1749,4	130,1	1286,8	72,8

Poznámka: M – aritmetický průměr; SD – směrodatná odchylka; BMI – index tělesné hmotnosti (kg/m²); BMR – bazální metabolismus (kcal)

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Náhodná premenná: BMI muža v baletnom súbore.
- Testujeme hypotézu, že jej stredná hodnota sa rovná 18,50.
- Použite t-test na testovanie tejto hypotézy.

- Potom zopakujte pre ženy

Príklad 2: Odtlačky



- Odtlačok chodidla alebo topánky
- Ako na základe neho odhadnúť výšku človeka?
- Topinard, polovica 19. storočia: dĺžka chodidla v priemere predstavuje 15 percent výšky.
- Dá sa táto hodnota použiť aj dnes?

Príklad 2: Odtlačky

- Brenda M. A. Rohren, Nebraska Wesleyan University - merania, ktoré použijeme na testovanie tejto hypotézy
- Merania pre 21 žien a 19 mužov v tvare:

Person	Sex	Age	Race/Ethnicity	Height	Length of Footprint	Length of Shoeprint	Stated Shoe Size	Shoe Size at Age of	Foot Length % of Stature	Shoe Length % of Stature
1	F	47	Caucasian	165.10	23.18	24.77	7	11	14.04	15.00
2	F	19	Caucasian	166.37	24.29	28.58	9	14	14.60	17.18
3	F	20	Caucasian	177.80	26.04	25.40	10	16	14.64	14.29
4	F	27	Caucasian	167.64	23.81	26.67	8	16	14.20	15.91
5	F	19	Caucasian	168.28	25.09	26.67	9	14	14.91	15.85

Príklad 2: Odtlačky

- Čo potrebujeme:

	Females	Males	All
min	13.27	14.29	13.27
max	15.87	16.03	16.03
mean	14.51	14.96	14.73
median	14.52	14.79	14.65
mode	14.20	15.07	14.20
stdev	0.66	0.51	0.63

← H_1 : Foot Length / Stature $\neq$ 15%
 H_0 : Foot Length / Stature = 15%

- Testujte hypotézu o hodnote 15 percent.

Príklad 2: Odtlačky

- Pre podiel veľkosti topánky a výšky našla autorka v literatúre hodnotu 17 percent
- Jej merania:

	Females	Males	All
min	14.29	15.99	14.29
max	17.50	18.12	18.12
mean	16.16	17.14	16.63
median	15.91	17.21	16.86
mode	16.92	17.91	16.92
stdev	0.83	0.60	0.87

← H_2 : Shoe Length / Stature $\neq$ 17%
 H_0 : Shoe Length / Stature = 17%

- Testujte hypotézu o hodnote 17 percent.

Párový t test

- Predchádzajúci test
 - Jednovýberový
 - Lebo sme mali jeden výber – jednu náhodnú premennú, ktorej strednú hodnotu sme testovali
- Párový t test
 - Dvojvýberový - dve premenné, budeme porovnávať ich stredné hodnoty
 - Párový – merania na tej istej (napr.) osobe

Párový t test

- Párový t test – príklady
 - Výsledky jazykového testu na začiatku a na konci opakovania lekcie – bolo opakovanie užitočné?
 - Očakávaný a skutočný počet bodov z písomky – vie študent dobre odhadnúť, ako písomku napísal?
 - Počet bodov z dvoch písomiek – dá sa povedať, že písomky dopadli rovnako?

Párový t test

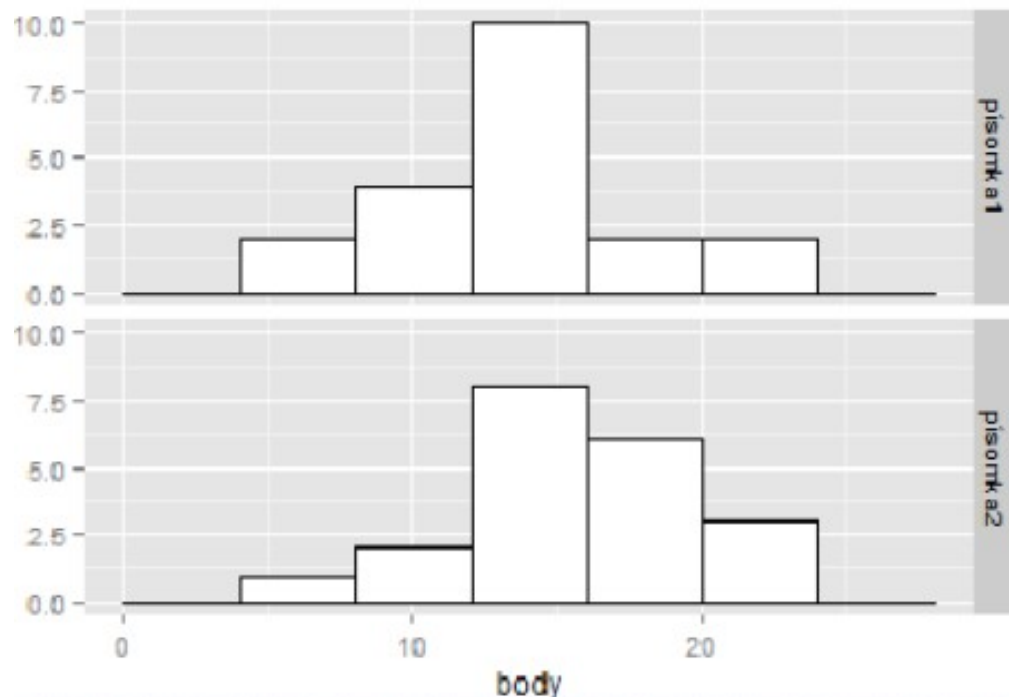
- Na čo sa nedá použiť párový t test – príklady:
 - Počet bodov z písomky v dvoch krúžkoch
 - Výsledky jazykového testu v dvoch skupinách, ktoré používali rôzne metódy pri opakovaní
 - Či je priemerné BMI v baletnom súbore rovnaké u mužov a u žien
- Dôvod: nie sú to párové dáta

Párový t test

- Párový t test - postup:
 - Máme náhodný výber z dvojrozmerného rozdelenia (X, Y)
 - Testujeme hypotézu, že $E[X] = E[Y]$
 - Vypočítame rozdiely $Z = X - Y$, o ktorých predpokladáme, že majú normálne rozdelenie
 - Hypotéza $E[X] = E[Y]$ znamená, že $E[Z] = 0$ - toto už ale vieme testovať jednovýberovým t-testom

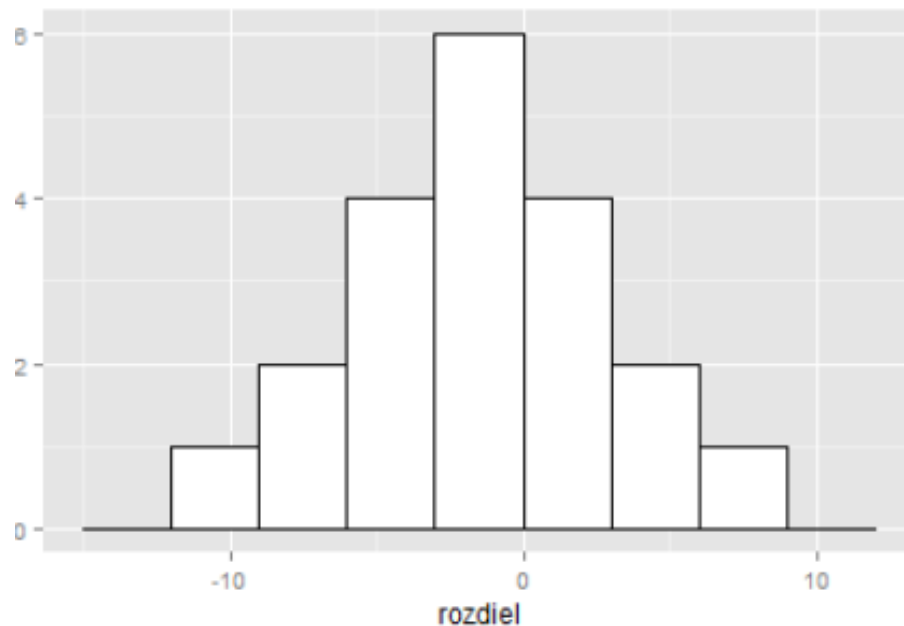
Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Cvičenia z matematickej analýzy pre 2. ročník EFM, ZS 2005/2006, dve písomky:



Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Rozdiely medzi bodmi z písomiek pre jednotlivých študentov:



Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

Poradové číslo	Písomka 1	Písomka 2
1	14,5	12
2	7	18,5
3	13,5	13
4	12,5	17
5	10	13
6	12	21
7	12,5	12
8	13	12,5
9	17	18
10	21,5	22
11	11	7
12	12,5	16
13	10,5	13
14	16	9,5
15	13	15
16	12,5	17
17	10	16
18	21,5	22
19	5	12,5
20	14,5	11,5
priemer	13	14,93

- Náhodné premenné: X = počet bodov z 1. písomky, Y = počet bodov z 2. písomky
- Chceme testovať, že X a Y majú rovnaké stredné hodnoty
- Priemer z 2. písomky je o niečo vyšší – je tento rozdiel štatisticky významný?

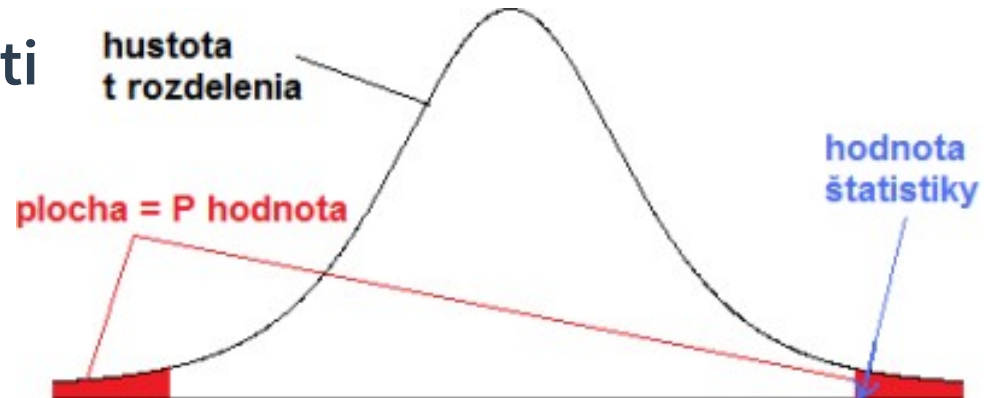
Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Vypočítame rozdiely
- Testujeme t-testom, či majú nulovú strednú hodnotu
- Dokončíte výpočet.

Poradové číslo	Písomka 1	Písomka 2	Rozdiel
1	14,5	12	2,5
2	7	18,5	-11,5
3	13,5	13	0,5
4	12,5	17	-4,5
5	10	13	-3
6	12	21	-9
7	12,5	12	0,5
8	13	12,5	0,5
9	17	18	-1
10	21,5	22	-0,5
11	11	7	4
12	12,5	16	-3,5
13	10,5	13	-2,5
14	16	9,5	6,5
15	13	15	-2
16	12,5	17	-4,5
17	10	16	-6
18	21,5	22	-0,5
19	5	12,5	-7,5
20	14,5	11,5	3
priemer	13	14,93	-1,93
štandardná odchýlka			4,47

P hodnota

- Dá viac informácie - nie iba rozhodnutie zamietame/nezamietame nulovú hypotézu na zvolenej hladine významnosti
- Ak platí nulová hypotéza, aká je pravdepodobnosť nášho výsledku alebo ešte viac vzdialeného od nulovej hypotézy?
- Teda: ak je hladina významnosti väčšia ako P hodnota, nulovú hypotézu zamietame



Príklad 3 - pokračovanie

- Vypočítame P hodnotu v teste o zhode stredných hodnôt bodov z dvoch písomiek z matematickej analýzy

Príklad 4: Odhad a meranie

- Zopakujeme jednu zo štatistických analýz z článku:
- Testuje sa hypotéza, že namerané a dievčatami odhadované hodnoty majú rovnakú strednú hodnotu.

Česká antropologie 64/2, Olomouc, 2014

SAMOHODNOCENÍ TĚLESNÉ VÝŠKY, HMOTNOSTI A BMI U 11–15LETÝCH DÍVEK

**Self-assessment
of body height and weight and BMI
by girls aged 11–15**

**Miroslav Kopecký¹, Kateřina Kikalová²,
Jitka Tomanová², Jiří Charamza¹**

Príklad 4: Odhad a meranie

- Vypočítajte hodnotu t-štatistiky a P-hodnotu.

Tabulka 1. Naměřené a odhadované hodnoty tělesné výšky (cm) dívek

Věk	n	Změřená tělesná výška		Odhadovaná tělesná výška		d		t-test p
		M	SD	M	SD	M	SD	
11	90	151,62	7,10	152,89	7,21	1,27	2,69	0,000**
12	129	158,26	7,01	159,30	7,48	1,03	2,72	0,000**
13	114	160,97	6,42	161,68	6,99	0,71	2,15	0,001**
14	132	163,49	6,26	164,81	6,83	1,32	2,37	0,000**
15	102	164,72	6,90	165,56	6,88	0,84	2,11	0,000**

Poznámka: n – počet probandů, M – aritmetický průměr, SD – směrodatná odchylka, d – rozdíl průměrných hodnot měřené a odhadované tělesné výšky, t-test – hladina významnosti, ** $p < .01$

Príklad 4: Odhad a meranie

- Rovnako pre hmotnosť: vypočítajte hodnotu t-štatistiky a P-hodnotu.

Tabuľka 2. Naměřené a odhadované hodnoty tělesné hmotnosti (kg) dívek

Věk	n	Změřená tělesná hmotnost		Odhadovaná tělesná hmotnost		d		t-test p
		M	SD	M	SD	M	SD	
11	90	43,76	10,04	41,49	9,15	-2,27	2,68	0,000**
12	129	48,10	10,40	45,50	9,49	-2,59	2,72	0,000**
13	114	51,66	11,53	49,54	10,67	-2,13	2,68	0,000**
14	132	55,70	10,61	55,05	9,68	-0,65	3,03	0,015*
15	102	57,91	10,06	56,59	9,94	-1,32	2,25	0,000**

Poznámka: n – počet probandů, M – aritmetický průměr, SD – směrodatná odchylka, d – rozdíl průměrných hodnot měřené a odhadované hmotnosti, t-test – hladina významnosti, * $p < .05$, ** $p < .01$