Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Domáca úloha 1, termín odovzdania: 1. 3. 2023 (na začiatku cvičenia)

- ***Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne.*** Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.
- ***„Plný počet" bodov za domácu úlohu je 60 – teda 3 príklady***, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru sa počítajú všetky získané body. „Plný počet" sa chápe v tom zmysle, že „plný počet" z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov.

Príklad 1 (20 bodov). Vráťme sa k úlohe o prezidentoch a písomke z dejepisu, s ktorou sme pracovali na cvičení:

A high school student who hadn't opened his American history book in weeks was dismayed to walk into class and be greeted with a pop quiz. It was in the form of two lists, one naming the 24 presidents in office during the 19th century in alphabetical order and another list noting their terms in office, but scrambled. The object was to match the presidents with their terms. The completely clueless student had to guess every time. On average, how many did he guess correctly?

Uvažujme dve stratégie, ktoré študent pri písaní písomky zvažuje:

- Priraďuje roky tak, že každému menu je priradené práve jedno obdobie a každé takéto priradenie má rovnakú pravdepodobnosť. S touto stratégiou sme robili na cvičení.
- Priraďuje roky tak, že každému menu priradí jedno z období, pričom každé obdobie vyberie s rovnakou pravdepodobnosťou a nezávisle od predchádzajúcich odpovedí (môže sa teda stať, že niekoľkým prezidentom bude priradené to isté obdobie v úrade).

a) **(5 bodov)** Aká je stredná hodnota počtu správnych odpovedí, ak si zvolí druhú stratégiu?
b) **(10 bodov)** Za každú správnu odpoveď dostane jeden bod. Pri ktorej z uvedených dvoch stratégii mu hrozí s vyššou pravdepodobnosťou, že jeho bodový zisk bude nula bodov?

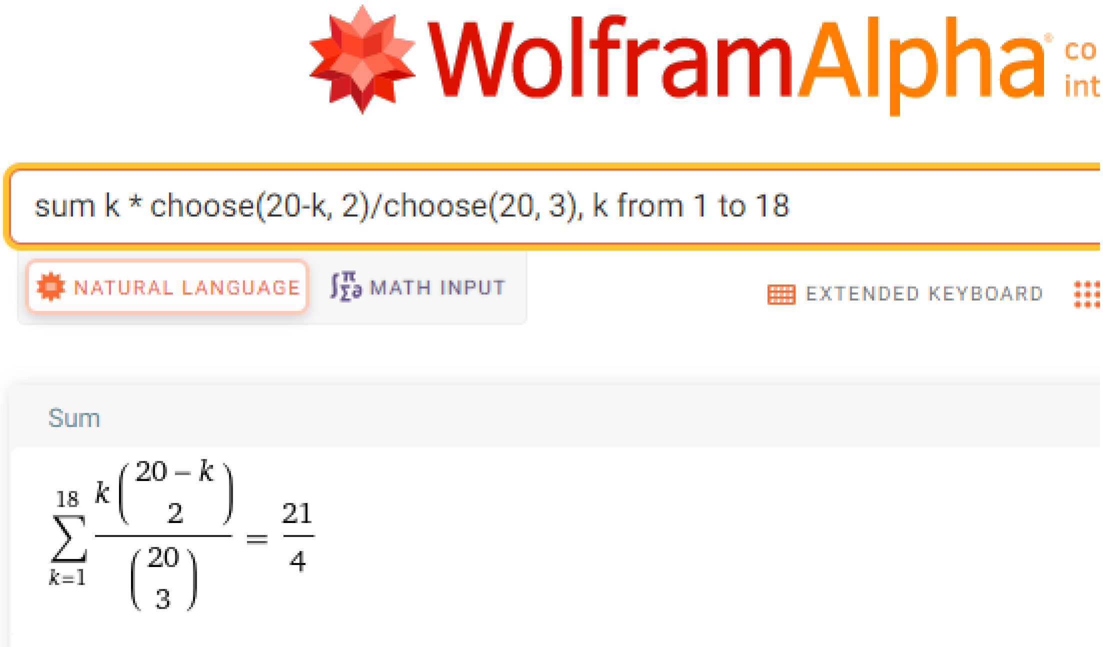
V poslednej otázke budeme hľadať inú stratégiu:

c) **(5 bodov)** Študent potrebuje získať z písomky aspoň jeden bod (kvôli celkovému súčtu bodov a systému hodnotenia). Nájdite stratégiu, pri ktorej to dosiahne s najväčšou pravdepodobnosťou.

Príklad 2 (20 bodov). V triede je N žiakov. V decembri, v posledný deň v škole pred prázdninami každý z nich prinesie do školy malý darček. Darčeky sa zabalia do rovnakých krabičiek a na konci vyučovania sa náhodne rozdelia medzi žiakov tejto triedy (každý si odnesie jeden darček a každé rozdelenie darčekov medzi žiakov má rovnakú pravdepodobnosť).

a) **(10 bodov)** Aká je stredná hodnota počtu žiakov, ktorí si domov odnesú vlastný darček?
b) **(10 bodov)** Aká je disperzia počtu žiakov, ktorí si domov odnesú vlastný darček?

Príklad 3 (20 bodov). Vráťme sa k príkladu z cvičenia o hľadaní písomiek, tentoraz nás bude zaujímať, kde sa nachádza prvá nájdená písomka. Cieľom tohto príkladu je vypočítať strednú hodnotu miesta, na ktorom sa nachádza prvá písomka vo všeobecnom prípade, ak si písomku príde pozrieť m študentov z celkového počtu N. Pre prípad z cvičenia ($N = 20$, $m = 3$) dáva WolframAlpha “podozrivo pekný” výsledok – zlomok 21/4.



Odvoďte strednú hodnotu miesta, kde sa nachádza prvá nájdená písomka.

Poznámka: *Ide nám o výpočet sumy, intuitívne úvahy o tom, ako by mali byť „v priemere“ rozmiestnené písomky, na plný počet bodov nestačia, za dobre vysvetlenú intuíciu za správnym výsledkom sa však dá získať 5 bodov. Výsledok z Wolframu nestačí, dá sa však použiť ako kontrola.*

Príklad 4 (20 bodov)
Dvaja opití kamaráti vychádzajú z krčmy ANAKONDA, ktorá má pri vchode nápis so svojim názvom. Jeden z nich náhodne odlepí dve písmená (s rovnakou pravdepodobnosťou pre každú dvojicu). Druhý ich prilepí naspäť, ale náhodne, nepozerá sa, či ich vracia správne. Aká je pravdepodobnosť, že nápis ANAKONDA zostane zachovaný?

Príklad 5 (20 bodov)
Majme množinu s n prvkami. Náhodne vyberieme dve jej podmnožiny (nezávisle na sebe, s návratom, každá podmnožina má rovnakú pravdepodobnosť výberu). Aká je pravdepodobnosť, že ich prienik bude prázdny?

Príklad 6 (20 bodov)
Hráči Adam, Boris a Cyril sa umiestnili v šachovom turnaji s rovnakým počtom bodov na prvom mieste. O celkovom víťazovi sa má rozhodnúť v dodatočných hrách. Za víťazstvo sa v nich dáva jeden bod, za remízu pol bodu a za prehru nič. Hry budú prebiehať nasledovne: Najskôr hráči zohrajú každý s každým po jednej hre. Ak niektorý z nich získa viac bodov ako obaja ostatní, stáva sa víťazom. Ak sa na prvom mieste mieste znovu umiestnia viacerí hráči, tímedzi sebou znovu zohrajú takéto kolo. Takto sa bude pokračovať, kým nebude určený víťaz.

Adam hrá šach dobre, ale opatrne. S Borisom ani s Cyrilom nikdy neprehrá, ale Borisa porazí len s pravdepodobnosťou 0,1 a Cyrila s pravdepodobnosťou 0,2. Stretnutie medzi Borisom a Cyrilom je dobrodružstvo a nikdy sa nekončí remízou. Boris v tejto hre zvíťazí s pravdepodobnosťou 0,6 a Cyril s pravdepodobnosťou 0,4. Výsledky jednotlivých hier sú nezávislé. Aká je pre jednotlivých hráčov pravdepodobnosť, že sa stanú víťazmi turnaja?