Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Domáca úloha 2, termín odovzdania: 8. 3. 2023 (na začiatku cvičenia)

- ***Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne.*** Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.
- ***„Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60 – teda 3 príklady***, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru sa počítajú všetky získané body. „Plný počet“ sa chápe v tom zmysle, že „plný počet“ z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov.

Príklad 1 (20 bodov). Vráťme sa k príkladu *People vs. Collins* z cvičenia. Predpokladajme, že je N dvojíc a pravdepodobnosť, že dvojica má určité vlastnosti, sa rovná Pr = $1/N$, a že splnenie týchto vlastností pre jednotlivé dvojice je nezávislé. V rozhodnutí súdu sa uvažuje takáto situácia a výpočet pravdepodobnosti, že existujú aspoň dve také dvojice za podmienky, že existuje aspoň jedna. Píše sa:

> *We note parenthetically that if 1/N = Pr, then as N increases indefinitely, the quotient in question approaches a limit of . . . . ., where ”e” represents the transcendental number (approximately 2.71828) familiar in mathematics and physics.*

Vypočítajte hodnotu limity, ktorá v citáte hore z rozhodnutia sudu vynechaná (v pôvodnom texte, samozrejme, je).

Príklad 2 (20 bodov). Uvažujme zovšeobecnenie príkladu o batožine z cvičenia. Predpokladajme, že prvá letecká spoločnosť stratí batožinu s pravdepodobnosťou a, druhá s pravdepodobnosťou b, tretia s pravdepodobnosťou c. (Všetky tieto pravdepodobnosti interpretujeme ako podmienené, teda za predpokladu, že batožina k danej leteckej spoločnosti dorazila.) Zistilo sa, že sa batožina stratila. Pravdepodobnosť, že ju stratila prvá spoločnosť, označme A, pravdepodobnosť, že ju stratila druhá spoločnosť B a pravdepodobnosť, že ju stratila tretia spoločnosť C. Rozhodnite, či je nasledovné tvrdenie pravdivé a svoju odpoveď dokážte: *Ak platí nerovnosť $b < a < c$, tak platí aj $B < A < C$.*

Príklad 3 (20 bodov). Dvaja strelci strieľajú striedavo na terč. Na začiatku si hodia mincu, kto bude v jednotlivých pokusoch strieľať ako prvý. Pravdepodobnosť zásahu pri prvom pokuse je pre strelca A rovná 0,4 a pre strelca B je rovná 0,5. Ak netrafí ani jeden, priblížia sa bližšie k terču, vďaka čomu sa pravdepodobnosti zásahu zvýšia o 0,05 a znovu strieľajú v tom istom poradí. Ak netrafia, znovu sa priblížia, pričom pravdepodobnosti zásahu sa zvýšia o rovnakú hodnotu a znovu v tom istom poradí vystrelia na terč. Toto sa opakuje, kým niektorý z nich zasiahne terč.

Dozvedeli sme sa, že terč bol prvýkrát trafený pri piatom výstrele. Aká je pravdepodobnosť, že v jednotlivých kolách začínal strelec A?

Príklad 4 (20 bodov). Vyberieme náhodne podmnožinu n-prvkovej množiny, pričom každá podmnožina má rovnakú pravdepodobnosť výberu. Vypočítajte pravdepodobnosť, že táto podmnožina má párny počet prvkov.

Príklad 5 (20 bodov). V lotérii sa losuje 5 čísel z 35. Vypočítajte pravdepodobnosť, že medzi vytiahnutými číslami bude dvojica susedných čísel.

Príklad 6 (20 bodov). Označme $P(A) = a$, $P(B) = b$, pričom $b > 0$. Dokážte, že pre podmienenú pravdepodobnosť $P(A \mid B)$ platí nerovnosť $P(A \mid B) \geq \dfrac{a+b-1}{b}$.