

**Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky**  
**Domáca úloha 7, termín odovzdania: 26. 4. 2023 (začiatok cvičenia)**

- V papierovej podobe na začiatku cvičenia.
- Ostatné poznámky zostávajú rovnaké ako v prvých domácich úlohách.
- Riešte výpočtom, nie pomocou simulácií. V prípade bonusu píšete len odpoveď – zvolenú hodnotu  $K$ .

**Príklad 1 (20 bodov).** Janko Hraško počíta príklady na skúške. Zostávajú mu dva príklady a hodina času. Čas, ktorý potrebuje na vyriešenie každého z príkladov, má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 20 minút a tieto dva časy sú nezávislé. Aká je pravdepodobnosť, že stihne vyriešiť obidva príklady?

**Príklad 2 (20 + 20 bodov).** Rómeo a Júlia sa majú stretnúť o dvanástej. Obaja však notoricky meškajú, doba ich meškania má exponenciálne rozdelenie. Stredná hodnota meškania Rómea je 30 minút a Júlie 20 minút. Ich meškania sú nezávislé.

- (20 bodov)** Aká je pravdepodobnosť, že Rómeo príde na stretnutie skôr?
- (20 bodov)** Keď prídu na dohodnuté miesto a svojho partnera tam nenájdu, štvrt' hodiny čakajú a ak ani za ten čas neprídu, vrátia sa domov. Aká je pravdepodobnosť, že sa im podarí stretnúť?

**Príklad 3 (20 bodov).** Overte, že funkcia, s ktorou sme pracovali na cvičení, je naozaj hustota náhodného vektora (nezáporná funkcia, ktorej integrál sa rovná 1):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{125,000} (50 - x - y) & \text{for } 0 < x < 50 - y < 50, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Príklad 4 (20 bodov).** Uvažujme situáciu z príkladu 4 z cvičenia (Basic a Deluxe poistenie). Vypočítajte pravdepodobnosť, že počas najbližších štyroch dní nebude hlásená ani jedna poistná udalosť.

**Príklad 5 (20 bodov).** Uvažujme situáciu z príkladu 5 z cvičenia s tým rozdielom, že sa spoluúčasť zníži na  $\frac{1}{2}$ . Aká je teraz stredná hodnota platby poisťovne?

**Bonus:**

Uvažujme zadanie z cvičení, na ktorých sme robili simulácie:

*Test obsahuje 60 otázok a na jeho vypracovanie je 180 minút. Práca na odpovedi sa skladá z dvoch častí. Najskôr sa spraví rozbor úlohy, čas potrebný na rozbor je náhodná premenná  $S$  (screen time). Počas rozboru sa určí čas  $W$  (working time), ktorý bude potrebný na vypracovanie, teda dokončenie výpočtov, úprava výsledku a pod. Predpokladá sa, že  $S$ ,  $W$  sú nezávislé náhodné premenné a sú nezávislé aj pre jednotlivé otázky. Predpokladajme, že študent zo skúsenosti so vzorovým testom vie, že  $S$ ,  $W$  majú exponenciálne rozdelenie so strednými hodnotami 1,77 a 4,23 minúty. Jeho stratégia je nasledovná: Ak sa po dokončení rozboru zistí, že doba vypracovania  $W$  bude väčšia ako  $K$ , nebude strácať čas vypracovaním, ale pôjde robiť rozbor ďalšej úlohy. Úlohou je nájsť optimálnu hodnotu  $K$ ,*

*ktorá maximalizuje strednú hodnotu počtu vyriešených príkladov. Ak bude príliš veľké, môže sa stať, že vypracovanie niekoľkých náročných otázok zaberie príliš veľa času a nezostane čas na ostatné. Pri malej hodnote sa zase budú robiť rozbor, ale riešiť sa bude len málo príkladov. Treba nájsť vhodný kompromis.*

Zvoľte si stratégiu – teda hodnotu  $K$ , na základe ktorej budete pri riešení testu postupovať. Vyhodnotenie sa bude robiť vygenerovaním 100 testov a spočítaním priemerného počtu vyriešených úloh pre každú odovzdanú stratégiu. Hodnotenie bude založené na úspešnosti stratégie: Ak bonus odovzdá  $N$  študentov, tak  $n$ -tý najúspešnejší získa k celkovému hodnoteniu domácich úloh navyše  $N + 1 - n$  bodov. V prípade rovnakého výsledku viacerých študentov sa pri výpočte bodov berie priemerné poradie.