

Spojité rozdelenia

1. Životnosť žiarovky má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 1 (jednotku času teda uvažujeme takú, že je ňou očakávaná životnosť žiarovky). Kúpili sme 10 žiaroviek a postupne ich vymieňame. Aké je pravdepodobnostné rozdelenie času, počas ktorého nám týchto 10 žiaroviek bude stačiť?
2. Máme k dispozícii generátor náhodných čísel z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, 1)$. Odvodte pomocou metódy inverznej transformácie postup, ako generovať náhodné čísla z exponenciálneho rozdelenia so zadanou strednou hodnotou.
3. Lietadlo zachováva výšku so systematickou chybou +20 metrov, chyba má pritom normálne rozdelenie so štandardnou odchýlkou 30 m. Lietadlo má pre svoj let určený koridor vysoký 100 metrov. Aká je pravdepodobnosť, že bude letieť mimo neho, ak je mu zadaná výška, ktorá zodpovedá stredu koridoru?
4. Pri meraní prístrojom vzniká chyba, ktorá má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a so štandardnou odchýlkou 2 mm. Aká je pravdepodobnosť, že dve nezávislé merania budú mať chyby v absolútnej hodnote väčšiu ako 1 mm, pričom tieto chyby budú mať rôzne znamienka?
5. Náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie. Aké je rozdelenie jej celej časti? Ako závisí odpoveď od parametra exponenciálneho rozdelenia?
6. Náhodná premenná X má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou. Určte disperziu, pri ktorej je maximálna pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobudne hodnotu z intervalu $(1, 2)$.
7. Náhodná premenná má lognormálne rozdelenie, ak má tvar $\exp(X)$, kde X je náhodná premenná s normálnym rozdelením. Určte strednú hodnotu lognormálne rozdelenej náhodnej premennej, ak jej logaritmus má rozdelenie $N(0, 1)$.
8. Test obsahuje 60 otázok a na jeho vypracovanie je 180 minút. Práca na odpovedi sa skladá z dvoch častí. Najskôr sa spraví rozbor úlohy, čas potrebný na rozbor je náhodná premenná S (screen time). Počas rozboru sa určí čas W (working time), ktorý bude potrebný na vypracovanie, teda dokončenie výpočtov, úprava výsledku a pod. Predpokladá sa, že S , W sú nezávislé náhodné premenné a sú nezávislé aj pre jednotlivé otázky. Predpokladajme, že študent zo skúsenosti so vzorovým testom vie, že S , W majú exponenciálne rozdelenie so strednými hodnotami 1,77 a 4,23 minúty. Jeho stratégia je nasledovná: Ak sa po dokončení rozboru zistí, že doba vypracovania W bude väčšia ako K , nebude strácať čas vypracovaním, ale pôjde robiť rozbor ďalšej úlohy. Úlohou je nájsť optimálnu hodnotu K , ktorá maximalizuje strednú hodnotu počtu vyriešených príkladov. Ak bude príliš veľké, môže sa stať, že vypracovanie niekoľkých náročných otázok zaberie príliš veľa času a nezostane čas na ostatné. Pri malej hodnote sa zase budú robiť rozbor, ale riešiť sa bude len málo príkladov. Treba nájsť vhodný kompromis.