

Spojité náhodné vektory III.

(podmienené rozdelenia)

Beáta Stehlíková

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
FMFI UK v Bratislave

Príklad 1 (Society of Actuaries)

- Poistovňa zaplatí škody na aute majiteľa poistky, ktorý spôsobil nehodu (náhodná premenná X) a škody na druhom aute v dopravnej nehode (náhodná premenná Y).
- X má rovnomerné rozdelenie na $(0, 1)$.
- Pre dané $X = x$ má Y rovnomerné rozdelenie na $(x, x + 1)$.
- Aká je pravdepodobnosť, že škoda na druhom aute bude väčšia ako 0.5?
- Možnosti: (A) $3/8$ (B) $1/2$ (C) $3/4$ (D) $7/8$ (E) $15/16$

- Simulácia:

```
priklad1 <- function(){  
  x <- runif(1, min = 0, max = 1)  
  y <- runif(1, min = x, max = x + 1)  
  return(y > 0.5)  
}
```

```
set.seed(123)  
simulacia <- replicate(10^5, priklad1())  
prop.table(table(simulacia))
```

```
simulacia  
  FALSE    TRUE  
0.12492 0.87508
```

Príklad 2 (SOA)

- Výška poistného plnenia X má rozdelenie dané hustotou $\frac{3}{8}x^2$ pre x z intervalu $(0, 2)$.
- Ak je výška poistného plnenia rovná x , tak čas spracovania má rovnomerné rozdelenie na intervale $(x, 2x)$.
- Čomu sa rovná pravdepodobnosť, že čas spracovania bude väčší ako 3?
- Možnosti: (A) 0.17 (B) 0.25 (C) 0.32 (D) 0.58 (E) 0.83

Príklad 3 (SOA)

- Po nahlásení poistnej udalosti spraví poisťovňa odhad výšky škody – je to náhodná premenná X
- Potom sa spraví podrobná analýza, jej výsledkom je skutočná výška škody – náhodná premenná Y
- Hustota: $f(x, y) = \frac{2}{x^2(x-1)}y^{-(2x-1)/(x-1)}, \quad x > 1, y > 1$
- Aká je pravdepodobnosť, že škoda je medzi 1 a 3, ak bol prvotný odhad rovný 2?
- Možnosti: (A) 1/3 (B) 2/3 (C) 1/3 (D) 2/3 (E) 8/9

Príklad 4 (SOA v pôvodnom znení)

A company offers a basic life insurance policy to its employees, as well as a supplemental life insurance policy. To purchase the supplemental policy, an employee must first purchase the basic policy. Let X denote the proportion of employees who purchase the basic policy, and Y the proportion of employees who purchase the supplemental policy. Let X and Y have the joint density function $f(x, y) = 2(x + y)$ on the region where the density is positive. Given that 10% of the employees buy the basic policy, what is the probability that fewer than 5% buy the supplemental policy?

(A) 0.010

(B) 0.013

(C) 0.108

(D) 0.417

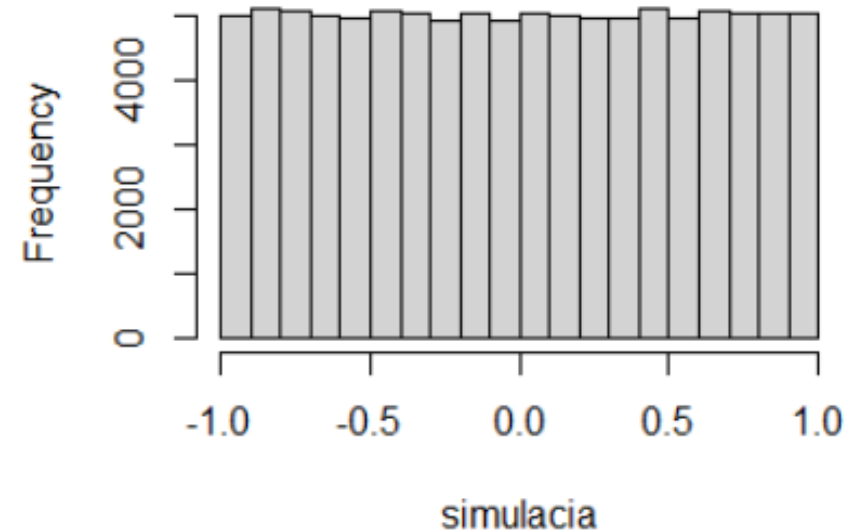
(E) 0.500

Spojité náhodné vektory IV.
(distribučná funkcia a hustota)

Príklad 5 (zo simulácií v DÚ)

Príklad 2 (20 bodov). Náhodné premenné X , Y sú nezávislé a každá z nich má exponenciálne rozdelenie s tou istou strednou hodnotou. Zvoľte si niekoľko (2-3) hodnôt pre túto spoločnú strednú hodnotu náhodných premenných. Zistite, aké rozdelenie má náhodná premenná $\frac{X-Y}{X+Y}$.

```
priklad5 <- function(lambda){  
  x <- rexp(1, rate = 1/lambda)  
  y <- rexp(1, rate = 1/lambda)  
  return((x - y)/(x + y))  
}  
set.seed(123)  
simulacia <- replicate(10^5, priklad5(5))  
hist(simulacia)
```



Príklad 6

- Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 1)$.
- Dokážte, že náhodný vektor $(\min(X, Y), \max(X, Y))$ má rovnomerné rozdelenie na trojuholníku

```
priklad6 <- function(){  
  xy <- runif(2, min = 0, max = 1)  
  return(c(min(xy), max(xy)))  
}  
set.seed(123)  
simulacia <- replicate(10^3, priklad6())  
dim(simulacia) # 2 1000  
plot(t(simulacia))
```

