

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 1, termín odovzdania: 28. 2. 2024 (na začiatku cvičenia)

- *Riešenia sa odovzdávajú napísané na papieri (nie elektronicky).*
- *Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.*
- **„Plný počet“ bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru sa počítajú všetky získané body. „Plný počet“ sa chápe v tom zmysle, že „plný počet“ z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov**

Príklad 1 (20 bodov). Na každej zo šiestich kartičiek je napísané jedno písmeno a sú usporiadané tak, že vytvárajú slovo KARATE. Zamiešame ich (tak dobre, že každé usporiadanie kartičiek má rovnakú pravdepodobnosť) a uložíme vedľa seba. Aká je pravdepodobnosť, že vznikne slovo RAKETA?

Príklad 2 (20 bodov). Hráči Adam, Boris a Cyril sa umiestnili v šachovom turnaji s rovnakým počtom bodov na prvom mieste. O celkovom víťazovi sa má rozhodnúť v dodatočných hrách. Za víťazstvo sa v nich dáva jeden bod, za remízu pol bodu a za prehru nič. Hry budú prebiehať nasledovne: Najskôr hráči zohrajú každý s každým po jednej hre. Ak niektorý z nich získa viac bodov ako obaja ostatní, stáva sa víťazom. Ak sa na prvom mieste znovu umiestnia viacerí hráči, tí medzi sebou znovu zohrajú takéto kolo. Takto sa bude pokračovať, kým nebude určený víťaz.

Adam hrá šach dobre, ale opatrne. S Borisom ani s Cyrilom nikdy neprehrá, ale Borisa porazí len s pravdepodobnosťou 0,1 a Cyrila s pravdepodobnosťou 0,2. Stretnutie medzi Borisom a Cyrilom je dobrodružné a nikdy sa nekončí remízou. Boris v tejto hre zvíťazí s pravdepodobnosťou 0,6 a Cyril s pravdepodobnosťou 0,4. Výsledky jednotlivých hier sú nezávislé. Aká je pre jednotlivých hráčov pravdepodobnosť, že sa stanú víťazmi turnaja?

Príklad 3 (40 bodov). Vrátime sa k príkladu z cvičenia, kde vystupoval študent na písomke z dejepisu, na ktorej tipoval odpovede. Na cvičení sme uvažovali situáciu, že volí náhodnú permutáciu odpovedí. Môže však postupovať aj tak, že sa pri každom prezidentovi rozhodne, aké obdobie mu priradí a s rovnakou pravdepodobnosťou zvolí hociktorú z možností. Odpovede pre jednotlivých prezidentov pritom volí nezávisle.

- (10 bodov)** Aké známe pravdepodobnostné rozdelenie má počet správnych odpovedí v tomto prípade? Uveďte typ rozdelenia a jeho parametre.
- (10 bodov)** Aká je stredná hodnota počtu správnych odpovedí, ktorú takýmto postupom dosiahne?
- (10 bodov)** Za každú správnu odpoveď je jednej bod. Aká je pravdepodobnosť, že pri tejto stratégii bude mať z písomky nula bodov?
- (10 bodov)** Predpokladajme, že študent potrebuje získať z písomky aspoň jeden bod (kvôli systému hodnotenia a jeho doterajším výsledkom z tohto predmetu). Navrhnite stratégiu, pri ktorej to dosiahne s najväčšou možnou pravdepodobnosťou.

Príklad 4 (40 bodov). Pokračujeme v analýze príkladu o študentovi, ktorý tipoval odpovede na písomke z dejepisu. Umelej inteligencii sme zadali otázku na pravdepodobnosť nulového počtu správnych odpovedí v prípade, že študent volil náhodnú permutáciu odpovedí, ktoré priradil k jednotlivým prezidentom (teda uvažujeme stratégiu z cvičenia). Spravili sme to dvakrát, v oboch pokusoch sme sa na UI obrátili s otázkou:



You

A high school student who hadn't opened his American history book in weeks was dismayed to walk into class and be greeted with a pop quiz. It was in the form of two lists, one naming the 24 presidents in office during the 19th century in alphabetical order and another list noting their terms in office, but scrambled. The object was to match the presidents with their terms. The completely clueless student had to guess every time.

He chose a random permutation of the list. What is the probability that no president is matched with his term in office?

Odpovede sú vo forme obrázkov uvedené na konci tejto domácej úlohy. Ako textový súbor sú na stránke predmetu pri súbore so zadáním úlohy.

- a) **(10 bodov)** Vo oboch pokusoch nám umelá inteligencia spomína tzv. *dearrangements* a ich počet $D(n)$. Vysvetlite, čo tento pojem znamená a vypočítajte hodnotu $D(n)$ priamo z definície pre malú hodnotu n (3 alebo 4).
- b) **(10 bodov)** Pre $D(n)$ sa uvádza vzťah $D(n) = (n - 1)(D(n - 1) + D(n - 2))$. Je tento vzťah správny? Svoje tvrdenie dokážte. *Teda: Ak tvrdíte, že vzťah je správny, dokážte ho. Ak tvrdíte, že nie je správny, nájdite kontrapríklad – hodnotu n , pre ktorú sa správny počet a počet získaný uvedeným vzťahom líšia.*
- c) **(10 bodov)** Začiatočné podmienky pre rekurentný vzťah sú v prvom prípade uvedené ako $D(0) = 1$, $D(1) = 0$, v druhom ako $D(1) = 0$, $D(2) = 1$. Sú tieto hodnoty správne? Dokážte.
- d) **(10 bodov)** Pri výpočte $D(24)$ sme dostali v prvom a druhom pokuse rôzne výsledky (a tým pádom aj rôzne odpovede na otázku o pravdepodobnosti). Je niektorá z nich správna? Alebo je správna hodnota iná? Kde konkrétne nastala prvá chyba vo výpočte, resp. výpočtoch, ktoré dávajú zlý výsledok (teda pokiaľ je výpočet správny)?

Prvé riešenie umelej inteligencie



ChatGPT

copy

To solve this problem, we need to find the number of permutations that result in no president being matched with his term in office, and divide it by the total number of possible permutations.

The number of ways to choose a random permutation of the list is $24!$, since there are 24 presidents.

To calculate the number of permutations that result in no president being matched with his term, we can use the principle of derangements.

A derangement is a permutation of a set in which none of the elements appear in their original position. Let's denote the number of derangements of a set with n elements as $D(n)$.

For a set with n elements, the number of derangements can be calculated recursively using the formula $D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$, with $D(0) = 1$ and $D(1) = 0$.

For our case, we have $n = 24$, so we can calculate $D(24)$ by applying the formula recursively:

$$D(24) = (24-1)(D(23) + D(22)) \quad D(23) = (23-1)(D(22) + D(21)) \quad D(22) = (22-1)(D(21) + D(20)) \dots \\ D(2) = (2-1)(D(1) + D(0)) \quad D(1) = 0 \quad D(0) = 1$$

Using this recursive calculation, we can determine that $D(24) = 9,455,551$.

Therefore, the probability that no president is matched with his term in office is given by $D(24)/24!$:

$$P = D(24)/24! = 9,455,551/24! \approx 0.367879$$

So, the probability is approximately 0.367879, or about 36.79%.

Druhé riešenie umelej inteligencie

V textovom súbore na stránke predmetu sú číselné hodnoty prehľadnejšie, napríklad:

Using this recurrence relation, we can calculate $D(24)$:

$$\begin{aligned} D(3) &= (3-1)(D(2) + D(1)) = (2)(1 + 0) = 2 \\ D(4) &= (4-1)(D(3) + D(2)) = (3)(2 + 1) = 9 \\ D(5) &= (5-1)(D(4) + D(3)) = (4)(9 + 2) = 44 \\ D(6) &= (6-1)(D(5) + D(4)) = (5)(44 + 9) = 265 \\ D(7) &= (7-1)(D(6) + D(5)) = (6)(265 + 44) = 1854 \\ D(8) &= (8-1)(D(7) + D(6)) = (7)(1854 + 265) = 14833 \\ D(9) &= (9-1)(D(8) + D(7)) = (8)(14833 + 1854) = 133496 \end{aligned}$$

Tiež je možné ich kopírovanie.



To solve this problem, we need to determine the number of derangements of the presidents' terms, as well as the total number of possible permutations.

A derangement is a permutation of a set in which no element appears in its original position. In this case, it means that no president should be matched with their term in office.

Let's denote the total number of presidents (24) as n .

The number of derangements for n is given by the following recurrence relation:

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

with initial conditions $D(1) = 0$ and $D(2) = 1$.

Using this recurrence relation, we can calculate $D(24)$:

$$\begin{aligned} D(3) &= (3-1)(D(2) + D(1)) = (2)(1 + 0) = 2 \\ D(4) &= (4-1)(D(3) + D(2)) = (3)(2 + 1) = 9 \\ D(5) &= (5-1)(D(4) + D(3)) = (4)(9 + 2) = 44 \\ D(6) &= (6-1)(D(5) + D(4)) = (5)(44 + 9) = 265 \\ D(7) &= (7-1)(D(6) + D(5)) = (6)(265 + 44) = 1854 \\ D(8) &= (8-1)(D(7) + D(6)) = (7)(1854 + 265) = 14833 \\ D(9) &= (9-1)(D(8) + D(7)) = (8)(14833 + 1854) = 133496 \\ D(10) &= (10-1)(D(9) + D(8)) = (9)(133496 + 14833) = 1334961 \\ D(11) &= (11-1)(D(10) + D(9)) = (10)(1334961 + 133496) = 14684570 \\ D(12) &= (12-1)(D(11) + D(10)) = (11)(14684570 + 1334961) = 161730541 \\ D(13) &= (13-1)(D(12) + D(11)) = (12)(161730541 + 14684570) = 1775552102 \\ D(14) &= (14-1)(D(13) + D(12)) = (13)(1775552102 + 161730541) = 19469394261 \\ D(15) &= (15-1)(D(14) + D(13)) = (14)(19469394261 + 1775552102) = 213237862152 \\ D(16) &= (16-1)(D(15) + D(14)) = (15)(213237862152 + 19469394261) = 2335530910401 \\ D(17) &= (17-1)(D(16) + D(15)) = (16)(2335530910401 + 213237862152) = 25600888296580 \\ D(18) &= (18-1)(D(17) + D(16)) = (17)(25600888296580 + 2335530910401) = 281140877257601 \\ D(19) &= (19-1)(D(18) + D(17)) = (18)(281140877257601 + 25600888296580) = 3095769953579882 \\ D(20) &= (20-1)(D(19) + D(18)) = (19)(3095769953579882 + 281140877257601) = 34113428869167083 \\ D(21) &= (21-1)(D(20) + D(19)) = (20)(34113428869167083 + 3095769953579882) = 375165429561837450 \\ D(22) &= (22-1)(D(21) + D(20)) = (21)(375165429561837450 + 34113428869167083) = 4129676631751178811 \\ D(23) &= (23-1)(D(22) + D(21)) = (22)(4129676631751178811 + 375165429561837450) = 45493251749266976864 \\ D(24) &= (24-1)(D(23) + D(22)) = (23)(45493251749266976864 + 4129676631751178811) = 500644087983736878725 \end{aligned}$$

Now, let's calculate the total number of possible permutations:

$$P(n) = n!$$

$$P(24) = 24! = 6,204,484,903,868,800$$

Finally, the probability that no president is matched with his term in office is:

$$\text{Probability} = D(24) / P(24) = 500,644,087,983,736,878,725 / 6,204,484,903,868,800$$

Hence, the probability is approximately 0.0807, or 8.07%.