

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 3, termín odovzdania: 13. 3. 2024 (na začiatku cvičenia)

- Riešenia sa odovzdávajú napísané na papieri (nie elektronicky).
- Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.
- „**Plný počet**“ bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru sa počítajú všetky získané body. „Plný počet“ sa chápe v tom zmysle, že „plný počet“ z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov

Príklad 1 (20 bodov). Vráťme sa k príkladu People vs. Collins z cvičenia. Predpokladajme, že je N dvojíc a pravdepodobnosť, že dvojica má určité vlastnosti, sa rovná $Pr = 1/N$, a že splnenie týchto vlastností pre jednotlivé dvojice je nezávislé. V rozhodnutí súdu sa uvažuje takáto situácia a výpočet pravdepodobnosti, že existujú aspoň dve také dvojice za podmienky, že existuje aspoň jedna. Píše sa:

We note parenthetically that if $1/N = Pr$, then as N increases indefinitely, the quotient in question approaches a limit of e^{-Pr} , where "e" represents the transcendental number (approximately 2.71828) familiar in mathematics and physics.

Vypočítajte hodnotu limity.

Príklad 2 (20 bodov). Uvažujme príklad 6 z cvičenia o hádzaní mincou s tým rozdielom, že pravdepodobnosť padnutia hlavy na k -tej minci bude $1/(2k)$. Aká je teraz pravdepodobnosť toho, že pri hádzaní n mincami padne nepárny počet hláv?

Príklad 3 (20 bodov). Nech n je prirodzené číslo. Náhodne vyberieme podmnožinu n -prvkovej množiny, pričom výber každej množiny má rovnakú pravdepodobnosť. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že počet prvkov tejto množiny bude párny (nulu tu považujeme tiež za párne číslo).

Príklad 4. Dvaja strelci strieľajú striedavo na terč. Na začiatku si hodia mincu, kto bude v jednotlivých pokusoch strieľať ako prvý. Pravdepodobnosť zásahu pri prvom pokuse je pre strelca A rovná 0,4 a pre strelca B je rovná 0,5. Ak netrafí ani jeden, priblížia sa bližšie k terču, vďaka čomu sa pravdepodobnosti zásahu zvýšia o 0,05 a znovu strieľajú v tom istom poradí. Ak netrafia, znovu sa priblížia, pričom pravdepodobnosti zásahu sa zvýšia o rovnakú hodnotu a znovu v tom istom poradí vystrelia na terč. Toto sa opakuje, kým niektorý z nich zasiahne terč.

- a) (20 bodov). Najneskôr v ktorom kole bude terč zasiahnutý?
- b) (20 bodov). Dozvedeli sme sa, že terč bol prvýkrát trafený pri piatom výstrele. Aká je pravdepodobnosť, že v jednotlivých kolách začínal strelec A?

Príklad 5 (20 bodov). Zoznam otázok na skúšku obsahuje 30 otázok. Napísané sú po dvojiciach na kartičkách, pričom sa neopakujú a dvojice sú vytvorené náhodne. Študent ovláda 25 otázok. Na to, aby skúšku spravil, musí buď zodpovedať obidve otázky z vytiahnutej kartičky alebo na jednu z otázok (ktorú si vyberie) a na jednu otázok z druhej vytiahnutej kartičky, pričom túto otázku vyberie skúšajúci (s rovnakou pravdepodobnosťou vyberie jednu z otázok, ktoré sú na kartičke). Aká je pravdepodobnosť, že študent skúšku spraví?