

## Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 5, termín odovzdania: 27. 3. , 9:00 hod.)

- **Odobzdávanie:**
  - Mailom na adresu [beata.ulohy@gmail.com](mailto:beata.ulohy@gmail.com) s predmetom **PaŠ 2024 – DÚ5 – meno**, odovzdáva sa komentovaný kód vrátane zakomentovaných výsledkov alebo kód spolu s výstupmi v html napísaný pomocou markdownu (<https://rmarkdown.rstudio.com/>).
  - V prípade odovzdávania opraveného riešenia z predchádzajúcej úlohy – na papieri na začiatku cvičenia.
- Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.
- „**Plný počet**“ bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru sa počítajú všetky získané body. „Plný počet“ sa chápe v tom zmysle, že „plný počet“ z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov

**Príklady 1 – 5 riešte simuláciami.**

**Príklad 1 (20 bodov).** Hádzeme  $2n$  krát pravidelnou mincou. Pritom sa počíta, koľkokrát padla hlava a koľkokrát znak. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá udáva počet okamihov, kedy bol počet dovtedy padnutých hláv a znakov rovnaký. Začiatočný stav (nula hláv, nula znakov) sa pritom nezapočítava.

Ukážka simulácie s  $n = 5$ , v ktorej je  $X = 3$ :

| Pokus | výsledok | počet hláv | počet znakov |
|-------|----------|------------|--------------|
| 1     | H        | 1          | 0            |
| 2     | H        | 2          | 0            |
| 3     | Z        | 2          | 1            |
| 4     | Z        | 2          | 2            |
| 5     | Z        | 2          | 3            |
| 6     | H        | 3          | 3            |
| 7     | Z        | 3          | 4            |
| 8     | Z        | 3          | 5            |
| 9     | H        | 4          | 5            |
| 10    | H        | 5          | 5            |

Pre  $n = 50$  odhadnite strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .

**Príklad 2 (20 bodov).** V určitom okamihu bolo v meste vybraných  $m$  manželských párov rovnakého veku. Po niekoľkých rokoch sa zistilo, že z týchto  $2m$  ľudí žije len  $a$ . Predpokladajme, že úmrtie ktorejkoľvek osoby je rovnako pravdepodobné a nezávislé na prežití alebo úmrtí ostatných. Aká je stredná hodnota počtu manželských párov, ktoré doteraz žijú? Odhadnite túto pravdepodobnosť pre  $m = 100$ ,  $a = 100$ .

Pre zaujímavosť: Túto otázku riešil v roku 1768 Daniel Bernoulli.

**Príklad 3.** Hádzeme  $n$  krát pravidelnou kockou.

- **(20 bodov)** Aká je pravdepodobnosť, že každé z čísel padne aspoň raz? Spravte odhad pre niekoľko zvolených hodnôt  $n$ .
- **(20 bodov)** Odhadnite, pre aké najmenšie  $n$  je pravdepodobnosť z predchádzajúceho bodu aspoň 0,95.

**Príklad 4 (20 bodov).** Do  $m$  škatúl hádzeme nezávisle na sebe  $n$  loptičiek, pričom pravdepodobnosť, že loptička padne do danej škatule je  $1/m$  pre každú škatuľu. Pre niekoľko zvolených hodnôt  $m$ ,  $n$  odhadnite počet prázdnych škatúl na konci pokusu.

**Príklad 5 (20 bodov).** Bude sa štyrikrát nezávisle hádzať mincou, na ktorej padá hlava s pravdepodobnosťou  $p$  (túto pravdepodobnosť nepoznáme). Pred každým hodom stavíme na jeden z výsledkov hlava/znak, pričom sa riadime nasledovnou stratégiou: Stavíme na ten výsledok, ktorý padol doteraz častejšie. Ak padlo rovnako veľa hláv ako znakov, s rovnakou pravdepodobnosťou stavíme na hlavu a na znak. Za každý uhádnutý výsledok dostávame bod. Odhadnite priebeh funkcie, ktorá danému  $p$  priradí strednú hodnotu počtu získaných bodov.

**Alternatívny príklad (20 bodov).** Namiesto jedného príkladu môžete odovzdať opravu ľubovoľného príkladu z domácej úlohy 3, z ktorého ste nezískali plný počet bodov. Odovzdáva sa nové kompletne riešenie.