

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 6, termín odovzdania: 10. 4 2024 - teda týždeň po Veľkej noci)

- *Odovzdávanie: Mailom na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom **PaŠ 2024 – DÚ6 – meno**, odovzdáva sa komentovaný kód vrátane zakomentovaných výsledkov alebo kód spolu s výstupmi v html napísaný pomocou markdownu (<https://rmarkdown.rstudio.com/>).*
- *Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.*
- *„Plný počet“ bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru sa počítajú všetky získané body. „Plný počet“ sa chápe v tom zmysle, že „plný počet“ z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov.*
- *Príklady riešte pomocou simulácií. Pri otázke o rozdeleniach treba spraviť odhad na základe histogramu, priemeru a pod. Ide o známe rozdelenia s „peknými“ hodnotami parametrov, odpoveď má obsahovať typ rozdelenia a jeho parameter/parametre.*

Príklad 1 (20 bodov). Janko Hraško počíta príklady na skúške. Zostávajú mu dva príklady a hodina času. Čas, ktorý potrebuje na vyriešenie každého z príkladov, má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 20 minút a tieto dva časy sú nezávislé. Aká je pravdepodobnosť, že stihne vyriešiť obidva príklady?

Príklad 2 (20 bodov). Náhodné premenné Y_i sú nezávislé a majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$. Zistite, aké rozdelenie bude mať X generované podľa nasledovného postupu:

Select a random number Y_1 , then another one Y_2 , etc., continuing as long as the numbers so far chosen form a decreasing sequence, i.e.,

$$Y_1 > Y_2 > \dots > Y_n > Y_{n+1}$$

As soon as a random number is drawn that exceeds its immediate predecessor, the process halts.

If n is even, forget the entire sequence of random numbers, call this experiment a failure, and repeat from the beginning.

If, however, n is odd then we're ready for output. The number X that will be output is just this: the integer part of X is the number of failures so far seen, and the fractional part of X is Y_1 , the largest (and first) member of the last decreasing sequence chosen.

For example, if we choose random numbers .63, .19, .37 we would record a failure and start again. If the second sequence is .44, .91 then we are ready for output, and the number that is selected by these events is $X = 1.44$.

Príklad 3 (20 bodov). Traja kolegovia prídu do jedálne na obed v náhodnom čase medzi 11:00 a 13:30 nezávisle od ostatných a v jedálni budú pol hodiny. Aká je pravdepodobnosť, že sa tam všetci traja stretnú (t. j. v niektorom okamihu budú všetci traja naraz v jedálni)?

Príklad 4 (20 bodov). Uvažujme situáciu z predchádzajúceho príkladu. Aká je pravdepodobnosť, že sa stretnú aspoň dvaja?

Príklad 5 (20 bodov). Čísla x, y sú zvolené nezávisle rovnomerne na intervale $(0, 1)$. Aká je pravdepodobnosť, že celé číslo, ktoré je najbližšie k podielu $\frac{x}{y}$, je párne?

Príklad 6 (20 bodov). Náhodné premenné X, Y sú nezávislé a každá z nich má exponenciálne rozdelenie s tou istou strednou hodnotou. Zvoľte si niekoľko možností pre túto spoločnú strednú hodnotu náhodných premenných. Zistite, aké rozdelenie má náhodná premenná definovaná ako podiel $\frac{X-Y}{X+Y}$.

Alternatívny príklad (20 bodov). Namiesto jedného príkladu môžete odovzdať opravu ľubovoľného príkladu z domácej úlohy 4, z ktorého ste nezískali plný počet bodov. Odovzdáva sa nové kompletne riešenie.