

PaŠ pre informatikov (cv 06)

Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

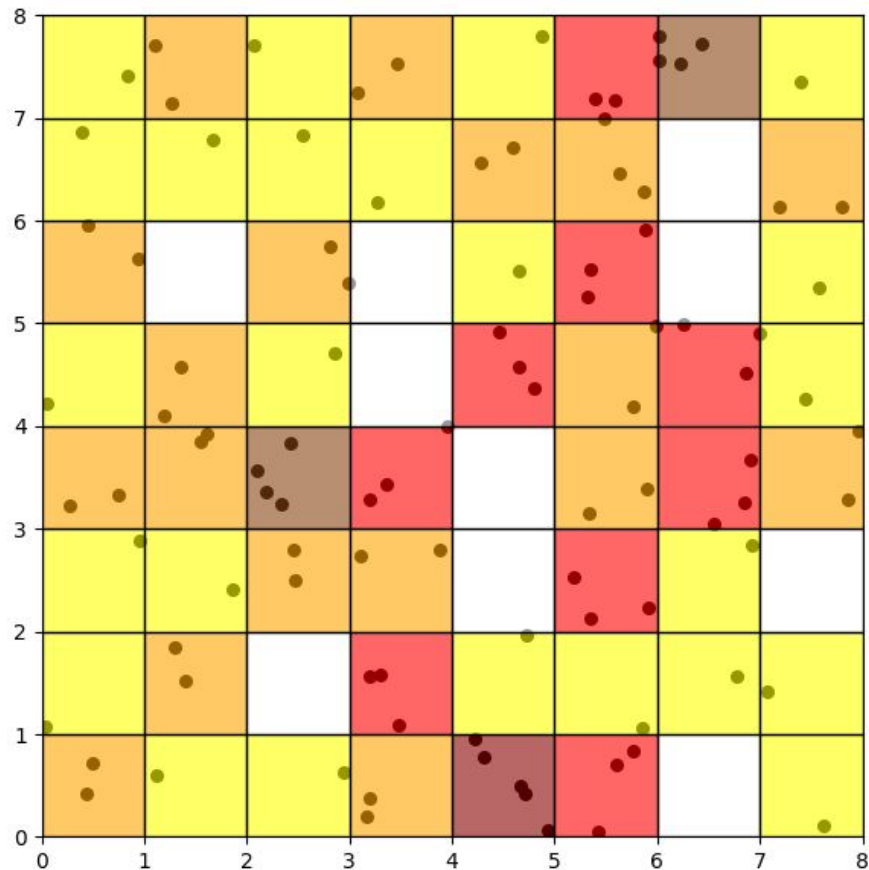
- Walter F. L. Weldon (1860 – 1906)
 - Hodil 12 kockami, zopakoval to 26 306 krát
 - Úspech – padnutie 5 alebo 6
 - Teoretická pravdepodobnosť $1/3$
 - Prakticky vyššia početnosť, pripisoval to konštrukcii bodiek, ktorá mala podľa nehovplyv na váhu stien



- Weldonove výsledky v tabuľke
- Niekoľko známych mien zo štatistiky:
 - Weldon poslal dáta v liste Galtonovi
 - Analyzoval ich aj Pearson, ktorý je autorom aj tohto chí kvadrát testu dobrej zhody

úspechov	početnosť
0	185
1	1149
2	3265
3	5475
4	6114
5	5194
6	3067
7	1331
8	403
9	105
10	14
11	4
12	0
spolu	26306

Príklad: Chí-kvadrát test dobrej zhody II.



- Na šachovnici (8x8) boli náhodne zvolené body, chceme vedieť, či *rovnomerne*.
- Ak sú volené rovnomerne, aké rozdelenie má počet bodov na jednom malom štvorci? Akým rozdelením sa dá aproximovať?
- Odvodte postup, ako to otestovať.

Príklad: Chí-kvadrát test dobrej zhody III.

Clarke, R. D. (1946). An application of the Poisson distribution. *Journal of the Institute of Actuaries*, 72(3), 481-481.

During the flying-bomb attack on London, frequent assertions were made that the points of impact of the bombs tended to be grouped in clusters. It was accordingly decided to apply a statistical test to discover whether any support could be found for this allegation.

An area was selected comprising 144 square kilometres of south London over which the basic probability function of the distribution was very nearly constant, i.e. the theoretical mean density was not subject to material variation anywhere within the area examined. The selected area was divided into 576 squares of $\frac{1}{4}$ square kilometre each, and a count was made of the numbers of squares containing 0, 1, 2, 3, ..., etc. flying bombs. Over the period considered the total number of bombs within the area involved was 537. The expected numbers of squares corresponding to the actual numbers yielded by the count were then calculated from the Poisson formula:

$$Ne^{-m}(1 + m + m^2/2! + m^3/3! + \dots),$$

where

$$N = 576 \quad \text{and} \quad m = 537/576.$$

The result provided a very neat example of conformity to the Poisson law and might afford material to future writers of statistical text-books.

The actual results were as follows:

No. of flying bombs per square	Expected no. of squares (Poisson)	Actual no. of squares
0	226.74	229
1	211.39	211
2	98.54	93
3	30.62	35
4	7.14	7
5 and over	1.57	1
	576.00	576

The occurrence of clustering would have been reflected in the above table by an excess number of squares containing either a high number of flying bombs or none at all, with a deficiency in the intermediate classes. The closeness of fit which in fact appears lends no support to the clustering hypothesis.

Applying the χ^2 test to the comparison of actual with expected figures, we obtain $\chi^2 = 1.17$. There are 4 degrees of freedom, and the probability of obtaining this or a higher value of χ^2 is .88.

Príklad: Testovanie hypotézy o pravdepodobnosti úspechu v pokuse

- Falošný hráč sa snaží vyrobiť kocku, pri ktorej by bola pravdepodobnosť padnutia šestky rovná 0,25.
- So svojím prototypom spraví 1000 pokusov. Ak hypotézu o pravdepodobnosti úspechu **$p=0,25$** zamietne, musí ešte na kocke ďalej popracovať. Ak ju nezamietne, bude spokojný. Ako bude prebiehať tento test? Použite aproximáciu normálnym rozdelením.
- Predpokladajme, že v 1000 pokusoch hodil šestku 230 krát. Aká je p-hodnota testu? Čo to preňho znamená?

Príklad: Testovanie hypotézy o zhode pravdepodobností úspechu v pokuse

- Falošný hráč pokračuje vo výrobe falošných kociek. Tentokrát sa snaží vyrobiť dve kocky, na ktorých padá šestka rovnako často (je pritom jedno, aká je to pravdepodobnosť).
- Odvodíme test založený na aproximácii normálnym rozdelením, ktorým bude vedieť otestovať, či sa mu to podarilo:
 - Nulová hypotéza: pravdepodobnosti padnutia šestky sú rovnaké pre obidve kocky
 - Alternatívna hypotéza: pravdepodobnosti sú rôzne
- Prvou kockou hodil 200 krát a šestka padla 21 krát. Druhou kockou hodil 225 krát a šestka padla 30 krát. Testujte hypotézu, že na obidvoch kockách padá šestka rovnako často.

Príklad: Jednostranné alternatívne hypotézy

Odvodíme modifikácie testu z prednášky pre nasledovné prípady (výpočet pomocou kritickej hodnoty aj pomocou p-hodnoty):

- Klasický liek pomôže pacientovi s pravdepodobnosťou 0,8. Nový liek dáva o niečo lepšie výsledky. Chceme vedieť, či je tento rozdiel štatisticky významný alebo sa dá pripísať náhode.
 - Nulová hypotéza: **$p=0,8$** (je rovnaký ako klasický)
 - Alternatívna hypotéza: **$p>0,8$** (je lepší)
- Študent píše test, v ktorom sú otázky s výberom zo 4 možností, správna je práve jedna. S akou pravdepodobnosťou odpovie správne?
 - Nulová hypotéza: **$p=0,25$** (odpovede háda)
 - Alternatívna hypotéza: **$p>0,25$** (aspoň niečo vie)

Poistka kryje škody do výšky 10. Ak je škoda vyššia, vyplatí sumu 10. Rozdelenie veľkosti škody Y má hustotu

$$f(y) = \begin{cases} 2y^{-3}, & y > 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Vypočítajte strednú hodnotu sumy, ktorú vyplatí poisťovňa po nastatí škody.