

# Pravdepodobnosť a štatistika pre informatikov 2025/26

Zbierka úloh, verzia 2

20. 10. 2025

## 1 Náhodné udalosti ako množiny, ich pravdepodobnosti

1. Pravdepodobnosť, že návšteva praktického lekára neskončí ani laboratórnym vyšetrením, ani odporúčaním k špecialistovi, je 0,35. Pravdepodobnosť odporúčenia k špecialistovi je 0,30 a laboratórne vyšetrenie je potrebné s pravdepodobnosťou 0,40. Určte pravdepodobnosť, že návšteva lekára skončí aj laboratórnym vyšetrením, aj odporúčaním návštevy špecialistu.

(A) 0,05   (B) 0,12   (C) 0,18   (D) 0,25   (E) 0,35

2. Vieme, že:

- Vodič si s dvakrát väčšou pravdepodobnosťou kúpi doplnkové havarijné poistenie ako poistenie proti invalidite.
- Rozhodnutia o kúpe jednotlivých poistení sú nezávislé udalosti.
- Pravdepodobnosť, že si vodič kúpi obe, je 0,15.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že si vodič nekúpi ani jedno z týchto poistení.

(A) 0,18   (B) 0,33   (C) 0,48   (D) 0,67   (E) 0,82

## 2 Klasická a podmienená pravdepodobnosť

1. Krvný test dá v prípade choroby pozitívny výsledok v 95% prípadov. V 0,5% prípadov dá pozitívny výsledok v prípade, ak choroba prítomná nie je. Túto chorobu má 1% populácie. Ak test ukáže u náhodne vybraného človeka prítomnosť choroby, aká je pravdepodobnosť, že ju naozaj má?

(A) 0,324   (B) 0,657   (C) 0,945   (D) 0,950   (E) 0,995

2. Na seminár sa prihlásilo 10 študentov, medzi nimi sú dvaja súrodenci - dvojččky. Náhodne bola vybraná trojica študentov, ktorá si pripraví prvú prezentáciu. Aká je pravdepodobnosť, že v tejto skupine sú obaja súrodenci?

### 3 Diskrétne náhodné premenné

1. Poistovňa platí poistencovi sumu vo výške 100 za deň počas najviac troch dní hospitalizácie a 25 za každý ďalší deň hospitalizácie. Počet dní hospitalizácie  $X$  má diskkrétne rozdelenie s pravdepodobnosťami:

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15}, & k = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Vypočítajte strednú hodnotu platby za hospitalizáciu.

(A) 85    (B) 163    (C) 168    (D) 213    (E) 255

2. Vypočítajte disperziu náhodnej premennej z predchádzajúceho príkladu.
3. Minca nie je pravidelná, pravdepodobnosť padnutia hlavy je  $3/5$ , pravdepodobnosť padnutia znaku je  $2/5$ . Hodíme trikrát touto mincou. Hodnota náhodnej premennej  $X$  sa rovná počtu hláv, od ktorého odpočítame počet znakov. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej  $X$  a nakreslite jej distribučnú funkciu.
4. Zistilo sa, že poistenci majú trikrát väčšiu pravdepodobnosť nahlásiť dve poistné udalosti ako štyri. Počet nahlásených poistných udalostí Poissonovo rozdelenie. Aká je jeho stredná hodnota?

(A)  $1/\sqrt{3}$     (B) 1    (C)  $\sqrt{2}$     (D) 2    (E) 4

5. V rámci preventívnej akcie bude možnosť nechať si zmerať krvný tlak. Nech  $X$  je počet meraní vykonaných do nájdenia prvého človeka s vysokým tlakom. Zo skúseností s takýmito akciami je známe, že  $\mathbb{E}(X) = 12.5$ . Určte pravdepodobnosť, že šiesty testovaný bude prvý, ktorý má vysoký krvný tlak.

(A) 0,000    (B) 0,053    (C) 0,080    (D) 0,316    (E) 0,394

6. Majme graf s  $n$  vrcholmi a  $m$  hranami. Vrcholy zafarbíme náhodne modrou alebo červenou farbou. Každá farba má rovnakú pravdepodobnosť a farbenie vrcholov prebieha nezávisle. Hranu nazveme jednofarebnou, ak sú obidva vrcholy, ktoré spája, rovnakej farby. Nájdite strednú hodnotu počtu jednofarebných hrán.
7. Máme 3 červené ruže, 3 ružové a 3 biele. Náhodne z nich vyberieme 5 a spravíme kyticu. Náhodné premenné  $R$  a  $B$  vyjadrujú počet ružových a bielych ruží v kytici. Dokážte, že tieto náhodné premenné nie sú nezávislé.
8. Pri výrobe žiaroviek má u istého výrobcu každá žiarovka 1 % pravdepodobnosť, že bude chybná, nezávisle od ostatných. Pri kontrole kvality sa náhodne vyberie 10 žiaroviek z dennej produkcie.

- Aká je stredná hodnota a disperzia počtu chybných žiaroviek?
- Aká je pravdepodobnosť, že budú chybné viac ako dve žiarovky?

9. Na určitom mieste sa v priemere stanú dve dopravné nehody za rok. Aká je pravdepodobnosť, že sa tam počas roka nestane žiadna nehoda?

## 4 Spojité náhodné premenné

1. Spojitá náhodná premenná  $X$  má distribučnú funkciu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ \frac{1}{9} \left( 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) & \text{pre } 0 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{pre } x > 3. \end{cases}$$

Vypočítajte:

- pravdepodobnosť, že nadobudne hodnotu z intervalu  $(1, 2)$ ,
  - pravdepodobnosť, že nadobudne hodnotu z intervalu  $(4, 5)$ ,
  - jej hustotu,
  - strednú hodnotu a disperziu.
2. V štvorci so stranou 1 zvolíme rovnomerne náhodne bod. Definujeme náhodnú premennú, vyjadrujúcu vzdialenosť tohto bodu k najbližšej strane štvorca. Odvoďte distribučnú funkciu a hustotu tejto náhodnej premennej.
3. Nech  $X$  je spojitá náhodná premenná s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{10}, & -2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .

(A)  $\frac{1}{5}$     (B)  $\frac{3}{5}$     (C) 1    (D)  $\frac{28}{15}$     (E)  $\frac{12}{5}$

4. Máme k dispozícii generátor náhodných čísel z rovnomerného rozdelenia na  $(0, 1)$ . Odvoďte, ako pomocou neho generovať realizácie náhodnej premennej z predchádzajúceho príkladu.

*Doplnené po prednáške 20. októbra:*

5. Počet dní od začiatku roka do nehody vysokorizikového vodiča je exponenciálne rozdelený. Poistovňa očakáva, že 30% vysokorizikových vodičov bude mať nehodu počas prvých 50 dní kalendárneho roka. Aká časť vysokorizikových vodičov bude mať podľa očakávania nehodu počas prvých 80 dní?

(A) 0.15    (B) 0.34    (C) 0.43    (D) 0.57    (E) 0.66

6. Životnosť tlačiarne stojacej 200 má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 2 roky. Výrobca sľubuje vrátiť celú zaplatenú sumu ak tlačiareň zlyhá počas prvého roku a jej polovicu, ak zlyhá počas druhého roku. Ak výrobca predá 100 tlačiarň, koľko očakáva vyplatiť zákazníkom za predčasne pokazené tlačiarne?

(A) 6 321    (B) 7 358    (C) 7 869    (D) 10 256    (E) 12 642

7. Čas meškania Romea má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 15 minút. Júlia prišla načas a čaká Romea. Prešlo 10 minút, a on ešte neprišiel. Aká je pravdepodobnosť, že príde počas nasledujúcich 10 minút?
8. Životnosť žiarovky v mesiacoch má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 3 a štandardnou odchýlkou 1. Životnosti sú nezávislé. Zákazník kúpi určitý počet žiaroviek, ktoré bude postupne vymieňať. Koľko najmenej ich musí kúpiť, aby pravdepodobnosť, že mu vydržia aspoň 40 mesiacov, bola aspoň 0,9772?
- (A) 14    (B) 16    (C) 20    (D) 40    (E) 55
9. Celková výška platby poisťovne pre poistku zdravotného poistenia má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{1000}e^{-x/1000}, \quad x > 0,$$

inde je nulová. Platby z jednotlivých poistiek sú nezávislé. Poisťovňa stanoví poistné o 100 vyššie ako je očakávaná hodnota jej platby. Ak sa predá 100 poistiek, aká je približná pravdepodobnosť, že jej platby presiahnu vybrané poistné? Na aproximáciu použite centrálnu limitnú vetu (aproximáciu súčtu nezávislých náhodných premenných normálnym rozdelením).

- (A) 0,001    (B) 0,159    (C) 0,333    (D) 0,407    (E) 0,460