

# Písomka

MENO:

- Píšte iba výsledky, resp. odpovede (nie postup, použitý kód a pod.).
- Ak nie je otázka položená inak, výsledkom je číselná hodnota. Za správnu odpoveď sa považuje taká, ktorá má v porovnaní s presným výsledkom relatívnu chybu menšiu ako 3 percentá. To znamená, že ak je správna odpoveď 0.15, uznávajú sa odpovede medzi  $0.15 \times 0.97 = 0.1455$  a  $0.15 \times 1.03 = 0.1545$ .
- Ak je odpoveďou na otázku pravdepodobnostné rozdelenie, treba uviesť aj jeho parametre (teda nie napríklad "normálne rozdelenie", ale "normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou 2").
- Za každú správnu odpoveď je 10 bodov. Prakticky to znamená, že každá správna odpoveď zlepšuje doteraz získanú známku o jeden stupeň.
- Zadania sú na nasledujúcej strane, odpovede píšte na vyznačené miesto.

Zadanie	Odpoveď
<p>Dve tajné skrýše obsahovali po 10 vzácných diamantov. Skrýše boli dobre zamaskované a nikto iný k nim nemal prístup okrem zbojníka, ktorý si tam tieto diamanty uložil. Zbojník si zakaždým, keď prechádzal okolo, vybral jeden diamant z náhodne zvolenej skrýše (výber každej z nich mal rovnakú pravdepodobnosť). Po čase zistil, že skrýša, z ktorej si chcel zobrať diamant, je prázdna. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhá skrýša je prázdna?</p>	
<p>Nech <math>\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5</math> sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou disperziou. Definujme premenné <math>X_i</math> nasledovne: <math>X_0 = 0</math> a pre <math>i = 1, 2, 3, 4, 5</math> je <math>X_i = X_{i-1} + \xi_i</math>. Aká je pravdepodobnosť, že všetky hodnoty <math>X_1, X_2, X_3, X_4</math> sú medzi <math>X_0</math> a <math>X_5</math>?</p>	
<p><math>X</math> a <math>Y</math> sú nezávislé náhodné premenné s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou <math>\mu</math>. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie podielu <math>\frac{X}{X+Y}</math> v závislosti od parametra <math>\mu</math>.</p>	
<p>Nech <math>X</math> je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na intervale <math>(0, 1)</math>. Pomocou nej sú definované náhodné premenné <math>U</math> a <math>V</math> nasledovne: <math>U</math> má rovnomerné rozdelenie na <math>(0, X)</math> a <math>V</math> má rovnomerné rozdelenie na <math>(X, 1)</math>. Ďalej pomocou nich definujeme binárnu náhodnú premennú <math>B</math>, ktorá nadobúda hodnotu 1 s pravdepodobnosťou <math>X</math> a hodnotu 0 s pravdepodobnosťou <math>1 - X</math>. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej <math>W = BU + (1 - B)V</math>.</p>	
<p>Senzor monitoruje kritické dáta v nehostinnom prostredí vzdialenej planéty. Každé meranie senzora (reprezentované 0 alebo 1) má kvôli silným interferenciám len 55% šancu na správny prenos do centrálného riadiaceho systému. Aby sa zvýšila presnosť, senzor odosiela svoje meranie 5 krát. Riadiaci systém interpretuje výsledok ako ten, ktorý sa v piatich prijatých hodnotách vyskytuje najčastejšie. Aká je pravdepodobnosť, že centrálny systém správne vyhodnotí meranie senzora?</p>	
<p>Náhodný bod <math>A</math> má rovnomerné rozdelenie na jednotkovej kružnici. Nezávisle od jeho sa volí bod <math>B</math> s rovnomerným rozdelením vo vnútri jednotkového kruhu. Zostrojíme obdĺžnik s diagonálou <math>AB</math>, ktorého strany sú rovnobežné so súradnicovými osami. Aká je pravdepodobnosť, že žiadny jeho bod nie je mimo jednotkového kruhu?</p>	
<p>Na stole je nakreslený rovnostranný trojuholník a na každom jeho vrchole sedí mucha. Každú minútu preletí každá mucha na niektorý iný vrchol. Každú z dvoch možností, ktoré má, si pritom vyberá s rovnakou pravdepodobnosťou, nezávisle od svojich predchádzajúcich letov a od rozhodnutia ostatných múch (na jednom vrchole môže sedieť aj viac múch). Nájdite strednú hodnotu času, ktorý prejde, kým budú po prvýkrát všetky tri muchy sedieť spolu na jednom vrchole trojuholníka.</p>	
<p>Stella a Orion sú nadšení vesmírni cestovatelia, ktorí na svojich potulkách zbierajú unikátne kryštály z rôznych galaxií. Existuje katalóg, ktorý obsahuje celkovo 20 známych druhov kryštálov. Je známe, že sú po galaxiách rozmiestnené takým spôsobom, že pri nájdení nového kryštálu má nájdenie každého z týchto druhov rovnakú pravdepodobnosť. Orion má vo svojej zbierke 16 rôznych druhov, Stella 14. Aká je pravdepodobnosť, že ak spoja svoje zbierky, budú mať kompletnú kolekciu všetkých 20 kryštálov?</p>	