Transforácia PDR na ODR

1. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 + y^2 + y^2 + 1,$$
ktoré má tvar $u(x, y, z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3,$$
ktoré má tvar $u(x, y) = f(s)$, kde $s = 2x^2 + y^2$.

3. Určte konštanty a, b tak, aby rovnica
$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5(2x^2 + 3y^2)$$
mala riešenie tvaru $u(x, y) = f(s)$, kde $s = 2x^2 + 3y^2$. Nájdite toto riešenie.

Transportná rovnica

1. Nájdite riešenie $\rho(x, y, t)$ transportnej rovnice
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v_1 \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v_2 \rho)}{\partial y} = 0,$$
ak $(v_1, v_2) = (-x, 2x + y)$ a je zadaná začiatočná podmienka $\rho(x, y, 0) = \rho_0(x, y)$.

2. Uvažujme jednorozmernú transportnú rovnicu, kde $v(x) = x$ so zadanou začiatočnou podmienkou, t.j.
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (x\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x).$$
Dokážte, že ak je začiatočná funkcia párna funkcia, tak aj riešenie $\rho(x, t)$ je párna funkcia premennej x v každom čase t. Platí takéto tvrdenie pre ľubovoľnú funkciu $v(x)$? Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.

3. Uvažujme nehomogénnu jednorozmernú transportnú rovnicu, kde v je konštanta, t.j.
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = f(x, t), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x).$$
Vyjadrite integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t)dx$ pomocou funkcií ρ_0 a f.

Burgersova rovnica

1. Nech $u(x, t)$ je riešením rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = u_0(x)$, pre ktorú $\lim_{x\to\infty} u_0(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = 0$. Dokážte, že integrál $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx$ nezávisí od času.