

Domáca úloha 1 - 4mef2 (utorok)

1. Na cvičení sme ukázali, že funkcia $z(x, y) = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$ je riešením rovnice

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

Nájdite teraz také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $z(x, -3x) = \sin(1 + x^2) + 3x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

2. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^2,$$

ktoré má tvar $u(x, y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Na nasludujúcom cvičení budeme potrebovať prevod do sférických súradníc:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \sin \psi, \\y &= r \sin \theta \sin \psi, \\z &= r \cos \psi,\end{aligned}$$

t. j.

$$\begin{aligned}r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ \psi(x, y, z) &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).\end{aligned}$$

Vypočítajte:

- (a) prvé derivácie $r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$,
(b) súčty druhých derivácií $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}, \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}, \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$.

Použitie označenie: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, atď. Výsledky na kontrolu nájdete na webe. Na cvičení nebudeme počítat všetky tieto derivácie, ale iba niektoré z nich.