Domáca úloha 1 - 4mef2 (utorok)

1. Na cvičení sme ukázali, že funkcia $z(x,y) = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy)$ je riešením rovnice

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

   Nájdite teraz také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $z(x, -3x) = x^2 + 3x + 1$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

2. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2,$$

   ktoré má tvar $u(x,y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Na nasludujúcom cvičení budeme potrebovať prevod do sférických súradníc:

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta\,\sin\psi, \\ y &= r\,\sin\theta\,\sin\psi, \\ z &= r\,\cos\psi, \end{aligned}$$

   t. j.

$$\begin{aligned} r(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta(x,y,z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ \psi(x,y,z) &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \end{aligned}$$

   Vypočítajte:

   (a) prvé derivácie $r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_x \psi_y, \psi_z$,

   (b) súčty druhých derivácií $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}$, $\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$.

   Použité označenie: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, atď. Výsledky na kontrolu nájdete na webe. Na cvičení nebudeme počítať všetky tieto derivácie, ale iba niektoré z nich.