Domáca úloha 5 - 4mef2 (utorok)

1. Pre aké α, β má nehomogénna rovnica vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
riešenie v tvare
$$u(x,t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right)?$$

2. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin x \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Dokážte, že pre každé $t > 0$ je $u(x,t)$ nepárnou funkciou premennej x.

3. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Rozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé - dokážte alebo nájdite kontrapríklad:

   (a) Ak pre konštanty a, b platí $a \leq u_0(x) \leq b$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak $a \leq u(x,t) \leq b$ pre všetky $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

   (b) Ak pre funkcie f_1, f_2 platí $f_1(x) \leq u_0(x) \leq f_2(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak $f_1(x) \leq u(x,t) \leq f_2(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}, t > 0$.