Domáca úloha 6 - 4mef2 (štvrtok)

1. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Dokážte, že ak $u_0(x) \leq x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak $u(x,t) \leq x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

   (b) Ukážte, že nasledovné tvrdenie neplatí (nájdite kontrapríklad): ak $u_0(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak $u(x,t) \leq g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

2. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Definujme funkciu

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx.$$

Nájdite príklad takých funkcií u_0 a f, aby F bola pre $t \in (0,1)$ rastúca, pre $t \in (0,\infty)$ klesajúca a aby platilo $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

3. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = \sin x \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že pre každé $t > 0$ je $u(x,t)$ v premennej x nepárnou periodickou funkciou s periódou 2π.