Domáca úloha 7 - 4mef2 (štvrtok)

1. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Definujme funkciu
$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx.$$
Nájdite príklad takých funkcií u_0 a f, aby F bola pre $t \in (0,1)$ rastúca, pre $t \in (0,\infty)$ klesajúca a aby platilo $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

2. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin x \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Dokážte, že pre každé $t > 0$ je $u(x,t)$ v premennej x nepárnou periodickou funkciou s periódou 2π.

3. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin x \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Dokážte, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

4. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = e^{-x^2} \ \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Pre každé $t > 0$ vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx$.