Domáca úloha 7 - 4mef2 (utorok)

1. *Ako sme videli, dôkaz navrhnutý na dnešných cvičeniach neprejde, preto ešte raz.* Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin x \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Dokážte, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

2. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = e^{-x^2} \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$
Pre každé $t > 0$ vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$.

3. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin(3\pi x)\cos(\pi x) \text{ pre } x \in [0,1].$$
a okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$