

# Príklady na precvičenie

## Rovnica vedenia tepla na priamke

1. **Výpočet riešenia.** Nájdite riešenie rovnice vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

s nasledovnými začiatočnými podmienkami pre  $x \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $u_0(x) = e^{3x}$
- (b)  $u_0(x) = 2x + 3$
- (c)  $u_0(x) = (2x + 3)^2$
- (d)  $u_0(x) = x^3$
- (e)  $u_0(x) = \sin(3x)$
- (f)  $u_0(x) = \cos(5x)$

2. **Nehomogénna RVT.** Nájdite riešenie nasledovných rovníc a spravte skúšku:

- (a)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2 - 6t$  pre  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$  pre  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}x$  pre  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ,  
 $u(x, 0) = x^2$  pre  $x \in \mathbb{R}$ .

3. **Exponenciálna transformácia.** Nájdite riešenie nasledovných rovníc a spravte skúšku:

- (a)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = 0$  pre  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ,  
 $u(x, 0) = x^2$  pre  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  pre  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ,  
 $u(x, 0) = 2e^x$  pre  $x \in \mathbb{R}$ .

4. **Integrál z riešenia.**

- (a) Vypočítajte hodnotu integrálu  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$  pre každé  $t > 0$ , ak  $u(x, t)$  je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$u(x, 0) = \max(0, 1 - 2|x|) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Vypočítajte hodnotu integrálu  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$  pre každé  $t > 0$ , ak  $u(x, t)$  je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-t}}{1 + x^2} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

- (c) Definujme funkciu  $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$  pre každé  $t > 0$ , kde  $u(x, t)$  je riešením rovnice s parametrom  $k$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Nájdite všetky hodnoty parametra  $k$ , pre ktoré platí, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ .

## 5. Porovnávanie riešení.

- (a) Nech  $u(x, t)$  je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = \max(0, 1 - |x|) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že pre každé  $t > 0$  a  $x \in \mathbb{R}$  platí  $0 < u(x, t) < 1$ .

- (b) Nech pre  $i = 1, 2$  je  $u_i(x, t)$  riešením rovnice

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = f_i(x, t); \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u_i(x, 0) = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R},$$

pričom  $f_1(x, t) < f_2(x, t)$  pre každé  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ . Dokážte, že potom  $u_1(x, t) < u_2(x, t)$  pre každé  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ .

- (c) Nech  $u(x, t)$  je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

a  $v(x, t)$  je riešením rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

pričom platí  $|u_0(x) - v_0(x)| < \varepsilon$  pre každé  $x \in \mathbb{R}$ . Dokážte, že potom  $|u(x, t) - v(x, t)| < \varepsilon$  pre každé  $t > 0$  a  $x \in \mathbb{R}$ .

## 6. Vlastnosti riešení.

- (a) Nech  $u(x, t)$  je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t} x^3 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^5 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že pre každé  $t > 0$  je  $u(x, t)$  rastúcou funkciou premennej  $x$ .