

Domáca úloha 1: 4mef1

1. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1,$$

ktoré má tvar $u(x, y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Na nasledujúcom cvičení budeme potrebovať prevod do sférických súradníc:

$$x = r \cos \theta \sin \psi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \psi,$$

$$z = r \cos \psi,$$

t. j.

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\psi(x, y, z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Vypočítajte:

(a) prvé derivácie $r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$,

(b) súčty druhých derivácií $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}, \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}, \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$.

Použité označenie: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, atď. Výsledky na kontrolu sú na nasledujúcich stranách. Na cvičení nebudeme počítať všetky tieto derivácie, ale iba niektoré z nich - jeden súčet z druhého bodu (ktorý si vyberiete).

□ 1 Definicie funkcii

⌈ (%i1) rho(x,y,z):=sqrt(x^2+y^2+z^2);

[(%o1) $\rho(x,y,z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

⌈ (%i2) theta(x,y,z):=atan(y/x);

[(%o2) $\theta(x,y,z) := \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$

⌈ (%i3) psi(x,y,z):=acos(z/sqrt(x^2+y^2+z^2));

[(%o3) $\Psi(x,y,z) := \operatorname{acos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$

□ 2 Prve derivacie funkcie rho

⌈ (%i4) diff(rho(x,z,y),x);

[(%o4) $\frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$

⌈ (%i5) diff(rho(x,z,y),y);

[(%o5) $\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$

⌈ (%i6) diff(rho(x,z,y),z);

[(%o6) $\frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$

□ 3 Prve derivacie funkcie theta

⌈ (%i7) ratsimp(diff(theta(x,y,z),x));

[(%o7) $-\frac{y}{y^2 + x^2}$

⌈ (%i8) ratsimp(diff(theta(x,y,z),y));

[(%o8) $\frac{x}{y^2 + x^2}$

⌈ (%i9) ratsimp(diff(theta(x,y,z),z));

[(%o9) 0

□ 4 Prve derivacie funkcie psi

```
(%i10) ratsimp(diff(psi(x,y,z),x));
```

```
(%o10) 
$$\frac{xz}{\sqrt{y^2+x^2}(z^2+y^2+x^2)}$$

```

```
(%i11) ratsimp(diff(psi(x,y,z),y));
```

```
(%o11) 
$$\frac{yz}{\sqrt{y^2+x^2}(z^2+y^2+x^2)}$$

```

```
(%i12) ratsimp(diff(psi(x,y,z),z));
```

```
(%o12) 
$$-\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{z^2+y^2+x^2}$$

```

□ 5 *Sucet druhych derivacii*

```
(%i16) ratsimp(diff(rho(x,y,z),x,2)+diff(rho(x,y,z),y,2)
+diff(rho(x,y,z),z,2));
```

```
(%o16) 
$$\frac{2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$$

```

```
(%i17) ratsimp(diff(theta(x,y,z),x,2)+diff(theta(x,y,z),y,2)
+diff(theta(x,y,z),z,2));
```

```
(%o17) 0
```

```
(%i18) ratsimp(diff(psi(x,y,z),x,2)+diff(psi(x,y,z),y,2)
+diff(psi(x,y,z),z,2));
```

```
(%o18) 
$$\frac{z}{\sqrt{y^2+x^2}(z^2+y^2+x^2)}$$

```