

## Domáca úloha 1: 4mef2

1. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ktoré má tvar  $u(x, y) = f(r)$ , kde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

2. Na nasledujúcom cvičení budeme potrebovať prevod do sférických súradníc:

$$x = r \cos \theta \sin \psi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \psi,$$

$$z = r \cos \psi,$$

t. j.

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\psi(x, y, z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Vypočítajte:

(a) prvé derivácie  $r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ ,

(b) súčty druhých derivácií  $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}, \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}, \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$ .

Použité označenie:  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , atď. Výsledky na kontrolu sú na nasledujúcich stranách. Na cvičení nebudeme počítať všetky tieto derivácie, ale iba niektoré z nich - jeden súčet z druhého bodu (ktorý si vyberiete).

## □ 1 Definicie funkcii

```
(%i1) rho(x,y,z):=sqrt(x^2+y^2+z^2);
```

```
(%o1)  $\rho(x,y,z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 
```

```
(%i2) theta(x,y,z):=atan(y/x);
```

```
(%o2)  $\theta(x,y,z) := \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ 
```

```
(%i3) psi(x,y,z):=acos(z/sqrt(x^2+y^2+z^2));
```

```
(%o3)  $\Psi(x,y,z) := \operatorname{acos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ 
```

## □ 2 Prve derivacie funkcie rho

```
(%i4) diff(rho(x,z,y),x);
```

```
(%o4)  $\frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$ 
```

```
(%i5) diff(rho(x,z,y),y);
```

```
(%o5)  $\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$ 
```

```
(%i6) diff(rho(x,z,y),z);
```

```
(%o6)  $\frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$ 
```

## □ 3 Prve derivacie funkcie theta

```
(%i7) ratsimp(diff(theta(x,y,z),x));
```

```
(%o7)  $-\frac{y}{y^2 + x^2}$ 
```

```
(%i8) ratsimp(diff(theta(x,y,z),y));
```

```
(%o8)  $\frac{x}{y^2 + x^2}$ 
```

```
(%i9) ratsimp(diff(theta(x,y,z),z));
```

```
(%o9) 0
```

## □ 4 Prve derivacie funkcie psi

```
(%i10) ratsimp(diff(psi(x,y,z),x));
```

```
(%o10) 
$$\frac{x z}{\sqrt{y^2+x^2} (z^2+y^2+x^2)}$$

```

```
(%i11) ratsimp(diff(psi(x,y,z),y));
```

```
(%o11) 
$$\frac{y z}{\sqrt{y^2+x^2} (z^2+y^2+x^2)}$$

```

```
(%i12) ratsimp(diff(psi(x,y,z),z));
```

```
(%o12) 
$$-\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{z^2+y^2+x^2}$$

```

## □ 5 *Sucet druhych derivacii*

```
(%i16) ratsimp(diff(rho(x,y,z),x,2)+diff(rho(x,y,z),y,2)
+diff(rho(x,y,z),z,2));
```

```
(%o16) 
$$\frac{2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$$

```

```
(%i17) ratsimp(diff(theta(x,y,z),x,2)+diff(theta(x,y,z),y,2)
+diff(theta(x,y,z),z,2));
```

```
(%o17) 0
```

```
(%i18) ratsimp(diff(psi(x,y,z),x,2)+diff(psi(x,y,z),y,2)
+diff(psi(x,y,z),z,2));
```

```
(%o18) 
$$\frac{z}{\sqrt{y^2+x^2} (z^2+y^2+x^2)}$$

```