

Príklady na precvičenie 1

1. Uvažujme parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$(x + 2y) \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

s neznámou funkciou $u = u(x, y)$.

- (a) Ukážte, že funkcia $u(x, y) = \phi(xy + y^2)$ je riešením zadanej PDR.
(b) Nájdite také riešenie, pre ktoré platí $u(x, 1) = x^2$.
(c) Nájdite také riešenie, pre ktoré platí $u(x, 2x) = x^4$.

2. Ukážte, že funkcia

$$u(x, y, z) = x \phi\left(\frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^2}\right)$$

je riešením PDR

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

3. Nájdite riešenie $u = u(x, y, z)$ rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

ktoré má tvar $u(x, y, z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. [Písomka, 2008] Nájdite hodnotu parametra k , pre ktorú má rovnica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4(x^2 + 2y^2)$$

riešenie v tvare $u(x, y) = f(s)$, kde $s = x^2 + 2y^2$. Nájdite toto riešenie.