Príklady na precvičenie 3
Rovnica vedenia tepla na priamke

1. **Výpočet riešenia.** Nájdite riešenie rovnice vedenia tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
s nasledovnými začiatočnými podmienkami pre $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $u_0(x) = e^{3x}$
   (b) $u_0(x) = 2x + 3$
   (c) $u_0(x) = (2x + 3)^2$
   (d) $u_0(x) = x^3$
   (e) $u_0(x) = \sin(3x) + 5\cos(5x)$

2. **Nehomogénna RVT.** Nájdite riešenie nasledovných rovníc a spravte skúšku:
   (a) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2 - 6t$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$,
   $u(x, 0) = 0$ pre $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}x$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$,
   $u(x, 0) = x^2$ pre $x \in \mathbb{R}$.

3. **Exponenciálna tranformácia.** Nájdite riešenie nasledovných rovníc a spravte skúšku:
   (a) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = 2x$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$,
   $u(x, 0) = x^2$ pre $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$,
   $u(x, 0) = 2e^x$ pre $x \in \mathbb{R}$.

4. **Integrál z riešenia.**
   (a) Vypočítajte hodnotu integálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx$ pre každé $t > 0$, ak $u(x, t)$ je riešením rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$u(x, 0) = \max(0, 1 - 2|x|) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$
   (b) Vypočítajte hodnotu integálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx$ pre každé $t > 0$, ak $u(x, t)$ je riešením rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-t}}{1 + x^2} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Vypočítajte hodnotu integálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každé $t>0$, ak $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

5. **Porovnávanie riešení.**

(a) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = \max(0, 1-|x|) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že pre každé $t>0$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $0 < u(x,t) < 1$.

(b) Nech pre $i = 1,2$ je $u_i(x,t)$ riešením rovnice

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = f_i(x,t); \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u_i(x,0) = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R},$$

pričom $f_1(x,t) < f_2(x,t)$ pre každé $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Dokážte, že potom $u_1(x,t) < u_2(x,t)$ pre každé $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

(c) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

a $v(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$v(x,0) = v_0(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

pričom platí $|u_0(x) - v_0(x)| < \varepsilon$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že potom $|u(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon$ pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

6. **Vlastnosti riešenia.**

(a) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}x^3 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = x^5 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že pre každé $t > 0$ je $u(x,t)$ rastúcou funkciou premennej x.

(b) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = \operatorname{arctg}(x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že pre každé $t > 0$ platí:

- funkcia $u(x,t)$ je rastúca funkcia premennej x,
- funkcia $u(x,t)$ je nepárna funkcia premennej x,
- $u(0,t) = 0$.