

Príklady na precvičenie

Homogénna rovnica vedenia tepla na ohraničenom intervale s nulovými o.p.

Nájdite riešenia nasledujúcich rovníc:

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= 2 \sin(\pi x) \cos(4\pi x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin^3(5x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

K odvodzovaniu goniometrických identít potrebných k prvým dvom príkladom - poznámka na nasledujúcej strane.

3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= x(1-x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

ODVODZOVANIE GONIOMETRICKÝCH IDENTÍT
- JEDEN Z MOŽNÝCH POSTUPOV

Jediný vzťah, ktorý si treba pamätať, je Eulerova formula

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (1)$$

Pre $-x$ z nej dostaneme

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x). \quad (2)$$

Z (1) a (2) teraz vieme vyjadriť sínus a kosínus:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (3)$$

Počítajme teraz napríklad $\sin(x) \cos(y)$. Dosadíme vyjadrenie pomocou exponenciál (3) a upravujeme:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} \left[e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} - e^{-i(x+y)} \right] \\ &= \frac{1}{4i} \left[\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} \right) + \left(e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} + \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned}$$