

Príklady na precvičenie

Rovnica vedenia tepla na ohraničenom intervale - pokračovanie

1. Nájdite riešenia nasledujúcich rovníc:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= tx \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= x(1-x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= t^2 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= x(1-x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2x \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= 3x \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, u(1, t) &= t \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

2. Nájdite limitu riešenia $u(x, t)$ pre $t \rightarrow \infty$ pre nasledujúce rovnice:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= x^4(2-x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, u(1, t) &= 2 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= x^4(2 - x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

3. Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t) \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

Definujme funkciu $F(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$.

- (a) Vyjadrite funkciu F pomocou začiatočnej podmienky u_0 a pravej strany f . Aká je fyzikálna interpretácia tohto výsledku?
- (b) Uvedte príklad takých funkcií u_0 a f , aby platilo: $F(0) = 0$, F je ostro rastúca a $F(t) \rightarrow \infty$ pre $t \rightarrow \infty$.
- (c) Uvedte príklad takých funkcií u_0 a f , aby platilo: $F(0) = 0$, F je ostro rastúca a $F(t) \rightarrow 1$ pre $t \rightarrow \infty$.