

Domáca úloha 1

1. Nájdite všeobecné riešenie $u = u(x, y, z)$ nasledovnej rovnice, ktoré má tvar $u(x, y, z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

- cvičenie v stredu: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- cvičenie vo štvrtok: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 + y^2 + z^2$

2. Na nasledujúcom cvičení budeme potrebovať prevod do sférických súradníc:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \sin \psi, \\y &= r \sin \theta \sin \psi, \\z &= r \cos \psi,\end{aligned}$$

t. j.

$$\begin{aligned}r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ \psi(x, y, z) &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).\end{aligned}$$

Vypočítajte:

- prvé derivácie $r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$,
- súčty druhých derivácií $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}, \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}, \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$.

Použité označenie: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, atď. Výsledky na kontrolu sú na nasledujúcich stranách. Na cvičení - v rámci riešenia DÚ - nebudeme počítat všetky tieto derivácie, ale iba:

- cvičenie v stredu: $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}$
- cvičenie vo štvrtok: $\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}$

Budúci týždeň:

- Budeme potrebovať výsledky príkladu 2 z DÚ - vypíšte si ich alebo si vytlačte str. 2 a 3 s výsledkami
- Budeme sa zaoberať Besselovou sférickou PDR - motivácia a postup na str. 4 a 5 - kópiu dostanete na cvičení

□ 1 Definicie funkcii

```
(%i1) rho(x,y,z):=sqrt(x^2+y^2+z^2);
```

```
(%o1)  $\rho(x,y,z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 
```

```
(%i2) theta(x,y,z):=atan(y/x);
```

```
(%o2)  $\theta(x,y,z) := \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ 
```

```
(%i3) psi(x,y,z):=acos(z/sqrt(x^2+y^2+z^2));
```

```
(%o3)  $\Psi(x,y,z) := \operatorname{acos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ 
```

□ 2 Prve derivacie funkcie rho

```
(%i4) diff(rho(x,z,y),x);
```

```
(%o4)  $\frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$ 
```

```
(%i5) diff(rho(x,z,y),y);
```

```
(%o5)  $\frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$ 
```

```
(%i6) diff(rho(x,z,y),z);
```

```
(%o6)  $\frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}}$ 
```

□ 3 Prve derivacie funkcie theta

```
(%i7) ratsimp(diff(theta(x,y,z),x));
```

```
(%o7)  $-\frac{y}{y^2 + x^2}$ 
```

```
(%i8) ratsimp(diff(theta(x,y,z),y));
```

```
(%o8)  $\frac{x}{y^2 + x^2}$ 
```

```
(%i9) ratsimp(diff(theta(x,y,z),z));
```

```
(%o9) 0
```

□ 4 Prve derivacie funkcie psi

```
(%i10) ratsimp(diff(psi(x,y,z),x));
```

```
(%o10) 
$$\frac{xz}{\sqrt{y^2+x^2}(z^2+y^2+x^2)}$$

```

```
(%i11) ratsimp(diff(psi(x,y,z),y));
```

```
(%o11) 
$$\frac{yz}{\sqrt{y^2+x^2}(z^2+y^2+x^2)}$$

```

```
(%i12) ratsimp(diff(psi(x,y,z),z));
```

```
(%o12) 
$$-\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{z^2+y^2+x^2}$$

```

□ 5 *Sucet druhych derivacii*

```
(%i16) ratsimp(diff(rho(x,y,z),x,2)+diff(rho(x,y,z),y,2)
+diff(rho(x,y,z),z,2));
```

```
(%o16) 
$$\frac{2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$$

```

```
(%i17) ratsimp(diff(theta(x,y,z),x,2)+diff(theta(x,y,z),y,2)
+diff(theta(x,y,z),z,2));
```

```
(%o17) 0
```

```
(%i18) ratsimp(diff(psi(x,y,z),x,2)+diff(psi(x,y,z),y,2)
+diff(psi(x,y,z),z,2));
```

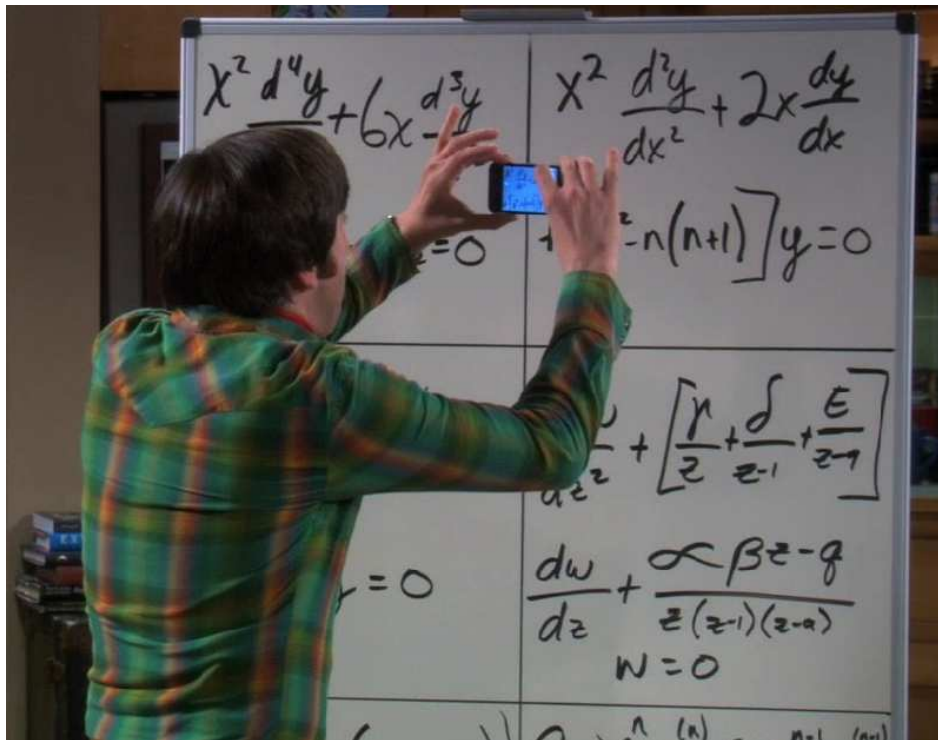
```
(%o18) 
$$\frac{z}{\sqrt{y^2+x^2}(z^2+y^2+x^2)}$$

```

Sférická Besselova diferenciálna rovnica

V epizóde *Využitie nohavíc do autobusu* seriálu *Teória veľkého tresku* vznikne nápad vyvinúť aplikáciu pre smartphony, ktorá by dokázala rozlíšiť ručne napísanú diferenciálnu rovnicu (resp. vyriešiť ju, umožniť jej zdieľanie na Facebooku, atď.).

Na jednom zábere je Howard, ako fotografuje určitú diferenciálnu rovnicu:



Na stránke [1] sa v komentári k tomuto záberu dočítame, že ide o sférickú Besselovu diferenciálnu rovnicu. V internetovej matematickej encyklopédii *MathWorld* sa pri tomto hesle dozvieme, že sférická Besselova diferenciálna rovnica vznikne pri transformácii Helmholtzovej parciálnej diferenciálnej rovnice do sférických súradníc. Je tu naznačený aj postup výpočtu. [2] My teraz túto transformáciu spravíme podrobne a na záver zistíme, aký člen rovnice zakrýva rukou Howard na obrázku.

Postup:

- Helmholtzova diferenciálna rovnica je rovnica

$$F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} + k^2 F = 0$$

s neznámou funkciou $F = F(x, y, z)$, kde k je konštanta.

- Sférické súradnice sú dané vzťahmi

$$x(r, \theta, \psi) = r \cos \theta \sin \psi, y(r, \theta, \psi) = r \sin \theta \sin \psi, z(r, \theta, \psi) = r \cos \psi,$$

t. j.

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \psi(x, y, z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Na domácu úlohu ste mali vypočítať:

1. prvé derivácie $r_x, r_y, r_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$,
2. súčty druhých derivácií $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}, \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}, \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$.

Tieto výsledky teraz využijeme.

- Definujme funkciu G vzťahom $G(r, \theta, \psi) = F(x(r, \theta, \psi), y(r, \theta, \psi), z(r, \theta, \psi))$, je to teda funkcia F vyjadrená v sférických súradniciach. Platí

$$F(x, y, z) = G(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \psi(x, y, z)),$$

vyjadrite využitím tohto vzťahu derivácie F_{xx}, F_{yy}, F_{zz} pomocou derivácií funkcie G . Teda:

$$\begin{aligned} F_x &= G_r r_x + G_\theta \theta_x + G_\psi \psi_x \\ F_{xx} &= G_{rr} r_{xx} + (G_{r\theta} r_x + G_{r\psi} \psi_x) r_x + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Napište PDR, ktorú spĺňa funkcia G , pričom všetky koeficienty budú vyjadrené pomocou r, θ, ψ (nie x, y, z).

- Riešenie rovnice získanej v predchádzajúcom bode budeme hľadať v separovanom tvare

$$G(r, \theta, \psi) = G_1(r)G_2(\theta)G_3(\psi).$$

Dosaďte tento predpokladaný tvar riešenia do rovnice a upravte ju na tvar

$$[\text{členy obsahujúce } r, \text{ ale nie } \theta, \psi] - [\text{členy neobsahujúce } r] = 0.$$

Táto rovnosť môže platiť iba vtedy¹, ak sa obe zátvorky rovnajú spoločnej konštante λ .

- Nech $\lambda = n(n + 1)$. Uvažujte zátvorku obsahujúcu členy s r a upravte ju tak, aby ste vedeli určiť členy z fotografie, ktoré sú zakryté rukou.

Literatúra

- [1] *The Lenwoloppali Differential Equation Scanner*.
<http://bigbangtheory.wikia.com/wiki/The_Lenwoloppali_Differential_Equation_Scanner>
- [2] Weisstein, Eric W. *Spherical Bessel Differential Equation*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <<http://mathworld.wolfram.com/SphericalBesselDifferentialEquation.html>>

¹S touto úvahou sa pri PDR ešte stretne, preto je dobré zapamätať si ju.