Cvičenia z PDR - vzorová písomka

1. [**6 bodov**] Nájdite riešenie rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= tx \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0, \\
u(x,0) &= 1 \quad \text{pre } x \in [0,1], \\
u(0,t) = 0, u(1,t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.
\end{aligned}$$

2. [**5 bodov**] Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-4t} \sin(3x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou $u(x,t) = 0$

3. [**7 bodov**] Nájdite všetky hodnoty parametrov $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí nasledovné tvrdenie a svoje tvrdenie dokážte:

Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = 0 \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou $u(x,t) = u_0(x)$, pričom $u_0(x) > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Potom aj $u(x,t) > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$.

4. [**7 bodov**] Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou $u(x,t) = 0$

Nájdite príklad takej funkcie $u_0(x)$ a $f(x,t)$, pre ktorú je riešenie $u(x,t)$ v každom čase $t > 0$ klesajúcou a konvexnou funkciou premennej x (t.j. ostro klesajúcou a rýdzo konvexnou).

Dokážte, že pri vašej voľbe $f(x,t)$ má riešenie uvedené vlastnosti (nestačí sa odvolať na tvrdenia z cvičení, bez dôkazu môžete použiť iba princíp porovnávania riešení).