ODVODZOVANIE GONIOMETRICKÝCH VZORCOV

Základnou identitou, z ktorej sa vychádza, je

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x} \qquad (*)$$

Ak dosadíme $-x$ namiesto x, dostaneme

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) = \cos x - i \cdot \sin x \qquad (**)$$

Zo vzťahov $(*)$ a $(**)$ vieme vyjadriť sínus a kosínus pomocou komplexných exponenciál:

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

PRÍKLAD: Odvodíme vzťah pre $\sin^3 x$.

$$\boxed{\sin^3 x} = \Big(\underbrace{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}_{\sin x}\Big)^3 = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{8i^3} = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{-8i} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{podľa} \\ \text{binomickej} \\ \text{vety}}}{=} -\frac{1}{8i}\left[(e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3\right] =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right] =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right] =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right] =$$

$$= -\frac{2i}{8i}\Big[\underbrace{\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}}_{\sin(3x)} - 3\underbrace{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}_{\sin x}\Big] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sin(3x) - 3\sin x\right] = \boxed{-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x}$$