Cvičenia z parciálnych diferencálnych rovníc
RVT na priamke - príklady na precvičenie

1. **Výpočet riešení.** Nájdite riešenie $u(x,t)$ nasledujúcich rovníc, kde $x \in \mathbb{R}, t > 0$:
   (a) $u_t - a^2 u_{xx} = 0, u(x,0) = (x-1)^2$
   (b) $u_t - a^2 u_{xx} = e^x, u(x,0) = e^{\frac{x}{2}}$
   (c) $u_t - u_{xx} - u_x = 0, u(x,0) = e^{\frac{x}{2}}$
   (d) $u_t - u_{xx} = t^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{t}{4}}, u(x,0) = 0$
   (e) $u_t - u_{xx} = 0, u(x,0) = 3\sin(2x) - 5\cos(7x)$
   (f) *(Písomka 2014)* $u_t - u_{xx} = e^{-2t}\cos(4x), u(x,0) = 2x$

2. **Vlastnosti riešení vyplývajúce z Greenovho vzorca**[1]**.**
   (a) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = \operatorname{arctg}(2x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že potom $u(0,t) = 0$ je pre každé $t > 0$
   (b) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = |\sin x|$ pre $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že potom:
      - $u(x,t)$ je pre každé $t > 0$ párna funkcia premennej x,
      - $u(x,t)$ je pre každé $t > 0$ periodická funkcia premennej x s periódou π,
      - $u(x,t) \in (0,1)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}, t > 0$.
   (c) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = u_0(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Podobne, nech $v(x,t)$ je riešením rovnice $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $v(x,0) = v_0(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Predpokladajme, že pre funkcie u_0, v_0 platí $u_0(x) \leq v_0(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, pričom na nejakom intervale platí ostrá nerovnosť. Dokážte, že potom $u(x,t) < v(x,t)$ pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = \max(0,x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že $u(x,t) > u_0(x)$ pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

[1] Dajú sa teda dokázať bez explicitného nájdenia riešenia, využitím zápisu v tvare integrálu a jeho úpravami.

3. **Vlastnosti riešení získané derivovaním RVT[2].**

   (a) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = -e^{-x}t$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = \mathrm{arctg}(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že potom $u(x,t)$ je rastúca funkcia premennej x pre každé $t > 0$.

   (b) *(Písomka 2014)* Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = \alpha e^{\beta t} x^2 + \beta^2$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = 0$ pre $x \in \mathbb{R}$, pričom $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sú parametre. Určte všetky hodnoty parametrov α, β, pre ktoré je funkcia $u(x,t)$ konvexnou funkciou premennej x pre každé $t > 0$.

   (c) Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = x^{1234}$ pre $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že potom $u(x,t)$ je pre každé $x \in \mathbb{R}$ rastúca funkcia času t.

4. **Integrál z riešenia.** Pre každé $t > 0$ vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$, ak $u(x,t)$ je riešením nasledujúcich rovníc, kde $x \in \mathbb{R}, t > 0$:

   (a) $u_t - u_{xx} = e^{-t-|x|}, u(x,0) = 0$

   (b) $u_t - u_{xx} - 4u_x = 0, u(x,0) = \max(0, 1 - |x|)$

   (c) $u_t - u_{xx} - 4u = 0, u(x,0) = \max(0, 1 - |x|)$

   Svoje tvrdenia dokážte.

[2] Dajú sa teda dokázať bez explicitného nájdenia riešenia.