

PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE
DOMÁCA ÚLOHA 3

1. Nájdite riešenie nasledovnej eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice

- PONDELOK: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$,
- UTOROK: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3$,

ktoré má tvar $u(x_1, x_2, x_3) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

2. Nájdite riešenie $u(x, t)$ rovnice vedenia tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku

- PONDELOK: $u(x, 0) = \sin(x)$
- UTOROK: $u(x, 0) = \cos(x)$

Návod: Riešenie hľadajte v tvare $u(x, t) = \alpha(t) \sin(x)$, resp. $u(x, t) = \alpha(t) \cos(x)$

3. Nájdite všeobecné riešenie Black-Scholesovej PDR

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

ktoré závisí iba od ceny akcie, a nie od času, t.j. má tvar $V(S, t) = V(S)$.

Návod: Nájdite dve riešenia V_1, V_2 v tvare S^α , kde α je konštanta, potom $V(S) = c_1 V_1(S) + c_2 V_2(S)$

4. Nájdite integrál nasledovného systému:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2 \\ \dot{y} &= 5e^x - y\end{aligned}$$