

Parciálne diferenciálne rovnice: Vzorová písomka

Každý príklad je za 5 bodov. Používať sa môže ľahák A4, čas na riešenie je 90 minút.

Príklad 1

Uvažujme eliptickú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{2018}$$

pre funkciu $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $n > 2$. Nájdite všeobecné riešenie tejto rovnice, ktoré má tvar

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(r), \quad \text{kde } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Príklad 2

Nájdite riešenie $u = u(x, y)$ rovnice

$$(x^2 - 2xy) \frac{\partial u}{\partial x} + (2xy - 4y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = (x - 2y)(x + 2y),$$

ktoré splňa podmienku $u(x, x) = \sin x$.

Príklad 3: Prežije ryba v znečistenej rieke?

Rieku modelujeme množinou

$$\{(x, y); |y| < 1, -\infty < x < \infty\}.$$

Továrň znečistila rieku vypustením škodlivej látky. Táto látka sa v rieke ďalej šíri, unášaná tokom rieky, podľa zákona zachovania hmoty. Ak označíme $u(x, y, t)$ koncentráciu látky v bode (x, y) v čase t , tak vyhovuje parciálnej diferenciálnej rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (y^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

kde nulový koeficient pri $\partial u / \partial y$ vyplýva z toho, že rieka tečie v smere osi x . Začiatočná koncentrácia v čase $t = 0$ je

$$u(x, y, 0) = e^{y-x^2}.$$

- Nájdite koncentráciu škodlivej látky v danom bode rieky (x, y) v čase t .
- V bode $(x, y) = (2, 0)$ žije ryba, ktorá znesie koncentráciu uvažovanej škodlivej látky do $1/2$. Ak koncentrácia prekročí túto úroveň, ryba zomrie. Prežije ryba v našom prípade? Ak áno, vysvetlite prečo. Ak niečo, nájdite čas, v ktorom zomrie.