

① Najdite riešenie $u(x,y)$ rovnice

$$(x^2 - 2xy) \frac{\partial u}{\partial x} + (2xy - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

vo všeobecnom tvare.

② Najdite riešenie rovnice

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

③ Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vypočítajte pre každý čas $t > 0$ hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx$.

④ Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé a svoje tvrdenia dokažte:

A) Ak $u_0(x) = \sin^2(x)$, tak $u(k\pi, 0) = 0$ pre $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall t > 0$.

B) Ak $u_0(x) = \sin^3(x)$, tak $u(x,t) = u(x+2\pi, t)$ pre $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$.

C) Ak $u_0(x) = x + \sin^2(x)$, tak $x < u(x,t) < x+1$ pre $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$.

Pr.1 - 3 body, Pr.2 - 4 body, Pr.3 - 4 body

Každá z častí A, B, C v pr.4 - 3 body