

CVIČENIA Z PDR 2005/2006

DOMÁCA ÚLOHA 2

TERMÍN ODOVZDANIA: 6.10.2005

Za správne riešenie ľubovoľného príkladu je 1 bod. Odovzdať môžete aj viac príkladov, maximálne však môžete získať jeden bod.

1. Nech produkčná funkcia $f(x_1, x_2)$ vyhovuje rovnici

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = f. \quad (1)$$

Dokážte, že potom má konštantné výnosy z rozsahu, t.j.

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2) \quad \text{pre všetky } x_1, x_2 \in D(f), t > 0.$$

Návod: Pre bod (x_1, x_2) definujte funkciu $F(t) = \frac{f(tx_1, tx_2)}{t}$ a vypočítajte jej deriváciu.

2. Nech $u(x, y, z)$ je riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 5,$$

ktoré má tvar $u(x, y, z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nájdite obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa $f(r)$ a vyriešte ju. Napíšte zodpovedajúce riešenie $u(x, y, z)$.

3. Nech $u(x, y)$ je riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3,$$

ktoré má tvar $u(x, y) = f(s)$, kde $s = 2x^2 + y^2$.

(a) Načrtnite vrstevnice funkcie $u(x, y)$.

(b) Nájdite obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa $f(s)$ a vyriešte ju. Napíšte zodpovedajúce riešenie $u(x, y)$.

Interpretácia príkladu 1:

Pri vstupoch x_1, x_2 je f hodnota vyrobeného výstupu. Ak by sme za jednotkové množstvo každého vstupu platili jeho hraničný produkt, za použité vstupy zaplatíme $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$. Rovnosť (1) znamená rovnosť týchto dvoch hodnôt - hodnoty výstupu a ceny vstupov.

- Na cvičení sme dokázali, že ak produkčná funkcia má konštantné výnosy z rozsahu, tak rovnosť (1) platí.
- V tomto príklade máme opačné tvrdenie: Ak pre nejakú produkčnú funkciu rovnosť (1) platí pre všetky množstvá (x_1, x_2) , tak táto produkčná funkcia má nevyhnutne konštantné výnosy z rozsahu.