Týždeň 11: Rovnica vedenia tepla na priamke pokračovanie

Beáta Stehlíková

FMFI UK Bratislava, Parciálne diferenciálne rovnice

Dokazovanie vlastností pomocou derivácií

- **Príklad 1.**
  - Nech $u(x,t)$ je riešením RVT so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = x^{2020}$. Dokážte, že $u(x,t)$ je v každom čase $t > 0$ konvexnou funkciou premennej x.
  - Základná myšlienka: Dokážeme, že $u_{xx}(x,t) > 0$ a to tak, že odvodíme PDR pre u_{xx}
  - Riešenie vo videu

Dokazovanie vlastností z Greenovho vzorca

- Greenov vzorec pre riešenie RVT $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ na priamke so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = u_0(x)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} u_0(s) ds$$

- Rovnosť dvoch výrazov - napríklad $u(x, t)$ a $u(x + \pi, t)$ môžeme dokazovať z Greenovho vzorca bez toho, aby sme integrál explicitne spočítali.
- Niekedy vieme určiť znamienko integrálu bez jeho výpočtu - podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, kde sme to už robili.

Príklad 2.

Nech $u(x,t)$ je riešením RVT

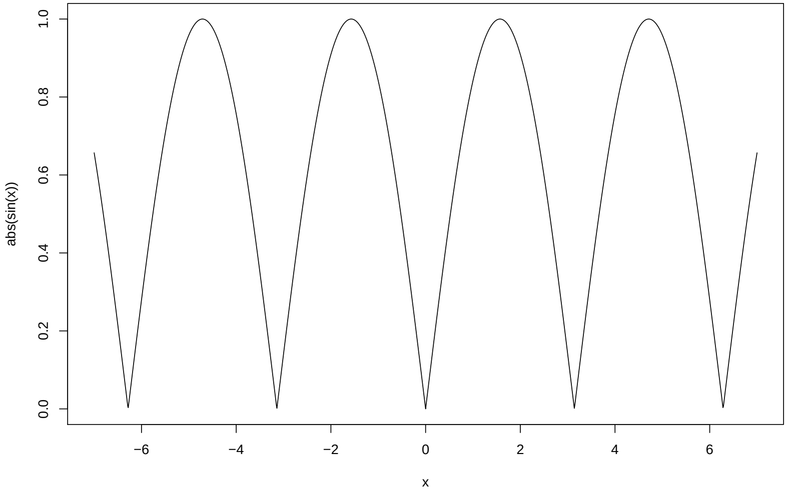
$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = |\sin(x)|$$

Dokážte, že platí:

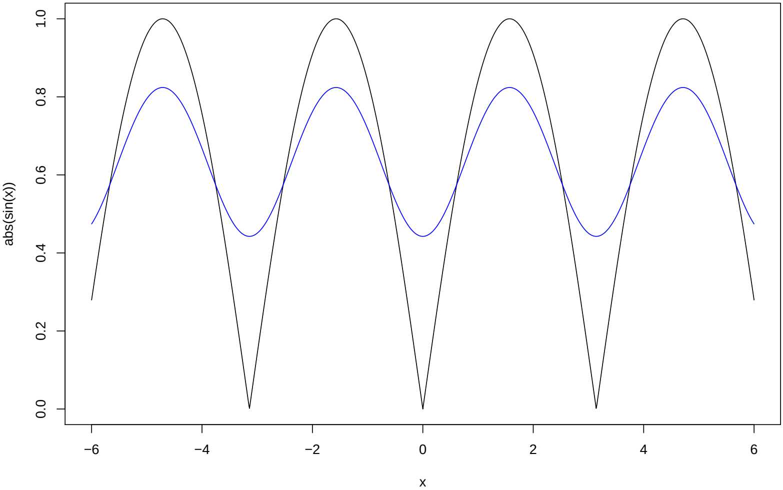
- Funkcia $u(x,t)$ je v každom čase $t > 0$ párna funkcia premennej x
- Funkcia $u(x,t)$ je v každom čase $t > 0$ periodická funkcia premennej x s periódou π
- Pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$ je $0 < u(x,t) < 1$

Riešenie. Vlastnosti budeme dokazovať z Greenovho vzorca bez výpočtu integrálu. Riešenie vo videu.



Poznámka: Riešenie nemôže mať tvar $u(x,t) = \alpha(t)|\sin(x)|$, lebo riešenie je v každom čase $t > 0$ nekonečne hladká funkcia.

Numerický výpočet riešenia:



Príklad 3.

Nech $u(x,t)$ je riešením RVT

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

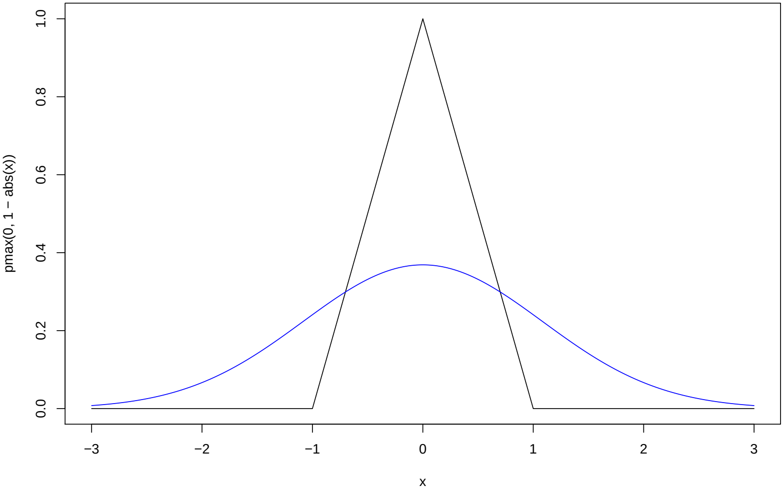
$$u(x,0) = \max(0, 1 - |x|)$$

Dokážte, že platí:

- Pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$ je $u(x,t) > 0$
- Vypočítajte $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každý čas

Riešenie. Riešenie vo videu

Numerický výpočet riešenia:



Príklad 4.

Nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každý čas $t > 0$, ak $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$u_t - u_{xx} + 2u_x = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = e^{-|x|}$$

Riešenie. Vo videu.

Nehomogénna RVT

- Riešime úlohu

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- Riešenie:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t) u_0(s) ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t-\tau) f(s,\tau) ds d\tau,$$

kde G je Greenova funkcia

$$G(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}$$

- Komentár k riešeniu vo videu, základná myšlienka: šírenie tepla daného začiatočnou podmienkou a šírenie tepla dodaného do systému, druhý člen je súčtom pre teplo dodané v čase od $\tau = 0$ do $\tau = t$

Výpočet riešenia

Príklad 5. Riešime úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = xe^{-t}$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = x$

- Dosadíme do vzorca a zintegrujeme
- Riešenie vo videu

Príklad 6. Riešime úlohu $u_t - a^2 u_{xx} = e^{-2t} \cos(4x)$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = x$

- Postup 1: Dosadíme do vzorca a zintegrujeme
- Postup 2: Odhadneme tvar riešenia
- Riešenie vo videu

Dokazovanie vlastností riešenia

Príklad 7. Nech $u(x,t)$ je riešením úlohy $u_t - a^2 u_{xx} = x^3 e^{-t}$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = arctg(x)$. Dokážte, že pre všetky časy $t > 0$ je $u(x,t)$ rastúcou funkciou premennej x.

- Rovnaká myšlienka ako pri homogénnej RVT: definujeme $v(x,t) = u_x(x,t)$, odvodíme PDR pre v a dokážeme, že $v(x,t) > 0$ pre $t > 0$
- Riešenie vo videu

Príklad 8. Nech $u(x,t)$ je riešením úlohy $u_t - a^2 u_{xx} = e^{-t} e^{-x^2}$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x,0) = e^{-x^2}$. Nájdite hodnotu intehrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre všetky časy $t > 0$.

- Rovnaká myšlienka ako pri homogénnej RVT: zintegrujeme vzorec pre riešenie, zameníme poradie integrovania a využijeme, že integrál z hustoty je 1
- Riešenie vo videu

Exponenciálna transformácia

Príklad 9. Riešime úlohu $u_t - u_{xx} + u = e^{2t}$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = 1$

- Podobne ako pri homogénnej RVT: spravíme transformáciu $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$, pričom $v(x, t)$ spĺňa RVT
- Riešenie vo videu