Týždeň 13: Rovnica vedenia tepla ohraničenom intervale

Beáta Stehlíková

FMFI UK Bratislava, Parciálne diferenciálne rovnice

Obsah časti I. - výpočet riešenia

- RVT na intervale $(0,1)$ so zadanou začiatočnou podmienkou a funkčnými hodnotami v krajných bodoch:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$

$$u(0,t) = A(t), u(1,t) = B(t) \quad \text{pre } t > 0$$

- Postupne budeme riešiť úlohy troch typov:
  - **Typ 1.** Homogénna RVT s nulovými okrajovými podmienkami
  - **Typ 2.** Nehomogénna RVT s nulovými okrajovými podmienkami
  - **Typ 3.** RVT s nenulovými okrajovými podmienkami

Typ 1. Homogénna RVT s nulovými okrajovými podmienkami

Zadanie

- Riešime úlohu

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$

a nulovými okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

Postup riešenia

Video `PDR_T13_02 RVT na intervale (1) homogenna s nulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 00.00-05.21, zhrnutie tohto odvodenia:

- Riešenie hľadáme v tvare sínusového rozvoja - budú určite splnené okrajové podmienky:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$$

- Zo začiatočnej pomienky:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \sin(k\pi x) \Rightarrow \alpha_k(0) = 2\int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx$$

- Dosadíme do PDR:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha(t)] \sin(k\pi x) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha(t) = 0$$

Postup riešenia

Záver:

- Riešenie je v tvare sínusového rozvoja

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$$

- Rozvoj začiatočnej podmienky:

$$\alpha_k(0) = 2\int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx$$

- Z toho výjde funkcia $\alpha(t)$ z rozvoja riešenia:

$$\alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-a^2 k^2 \pi^2 t}$$

Príklad 1

Video `PDR_T13_02 RVT na intervale (1) homogenna s nulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 05.21-08.42,

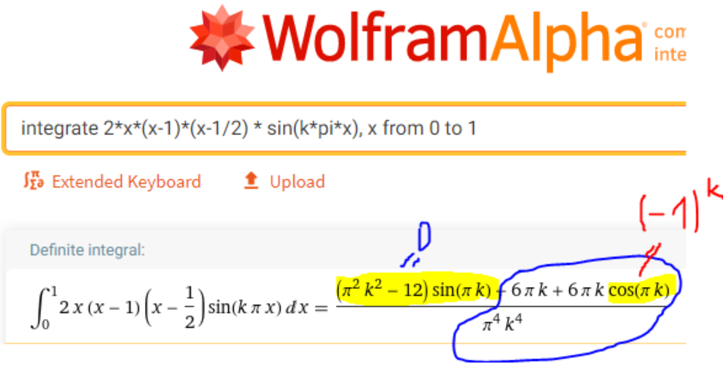
Zadanie:

- Homogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ na intervale $(0, 1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0, t) = u(1, t) = 0$
- Začiatočná podmienka: $u(x, 0) = x(x - 1)(x - \frac{1}{2})$

Riešenie:

- Rozvoj začiatočnej podmienky
$$\alpha_k(0) = 2 \int_0^1 x(x-1)(x - \frac{1}{2}) \sin(k\pi x) dx =: A_k$$
- Funkcia $\alpha_k(t)$ (pre tento typ RVT vždy rovnaká):
$$\alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-a^2 k^2 \pi^2 t}$$
- Riešenie v tvare rozvoja $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$ je $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x)$

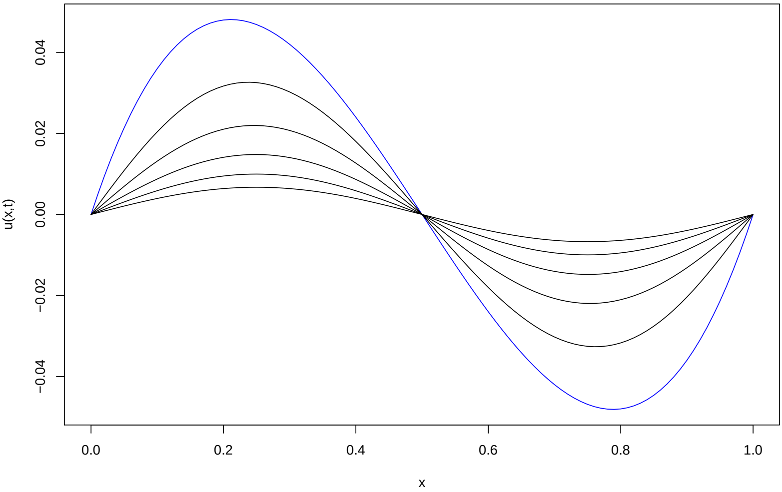
- Integrovanie začiatočnej podmienky:



- Teda máme koeficient, ktorý sme označili ako A_k:

$$A_k = \frac{6 + 6(-1)^k}{\pi^3 k^3}$$

Graf riešenia v R-ku: video PDR_T13_03 Graf riesenia RVT v R-ku



Príklady na precvičenie I.

Ide vlastne len o rozvoj začiatočnej podmienky.

Zadanie:

- Homogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ na intervale $(0, 1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0, t) = u(1, t) = 0$
- Začiatočná podmienka:
  - $u(x, 0) = x$ (v riešení nastane skok v pravom krajnom bode)
  - $u(x, 0) = -5\sin(2\pi x) + 3\sin(3\pi x)$ (už je v tvare sínusového rozvoja)
  - $u(x, 0) = 2\sin(2\pi x)\cos(2\pi x)$ (pripomeňme si goniometrický vzorec $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$)
  - $u(x, 0) = \sin(2\pi x)\cos(3\pi x)$ (poznámka k odvodzovaniu goniometrických vzorcov na nasledujúcej strane)

Poznámka ku goniometrickým vzorcom

- Stačí si pamätať:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

- Potom platí aj

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x)$$

- Z toho:

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- A môžeme si odvodiť vzorec napríklad pre $\sin^3(x)$:

$$
\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3} \\
&= \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{8i^3} \\
&= \frac{[e^{3ix}-e^{-3ix}]-3[e^{ix}-e^{-ix}]}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+\frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}
$$

Typ 2. Nehomogénna RVT s nulovými okrajovými podmienkami

Zadanie

- Riešime úlohu

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$

a nulovými okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

Postup riešenia

Video `PDR_T13_04 RVT na intervale (2) nehomogenna s nulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 00.00-07.34, zhrnutie tohto odvodenia:

- Riešenie hľadáme v tvare sínusového rozvoja - budú určite splnené okrajové podmienky:
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(t) \sin(k\pi x)$$
- Zo začiatočnej pomienky:
$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \sin(k\pi x) \Rightarrow \alpha_k(0) = 2\int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx$$
- Dosadíme do PDR:
$$\sum_{k=1}^{\infty} [\dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha(t)] \sin(k\pi x) = f(x,t)$$
$\Rightarrow \dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha(t) = f_k(t)$, kde $f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin(k\pi x) \Rightarrow f_k(t) = 2\int_0^1 f(x,t) \sin(k\pi x) dx$

Postup riešenia

Záver:

- Riešenie je v tvare sínusového rozvoja

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$$

- Rozvoj začiatočnej podmienky:

$$\alpha_k(0) = 2\int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx$$

- Rozvoj pravej strany:

$$f_k(t) = 2\int_0^1 f(x,t) \sin(k\pi x) dx$$

- Z toho výjde ODR pre funkciu $\alpha(t)$ z rozvoja riešenia:

$$\dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha_k(t) = f_k(t)$$

Riešenie ODR pre funkciu $\alpha(t)$ z rozvoja riešenia:

$$\dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha_k(t) = f_k(t)$$

- Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je vždy

$$\alpha_k^H(t) = c_k e^{-a^2 k^2 \pi^2 t}$$

- Partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice $\alpha_k^P(t)$ treba nájsť (často vieme odhadnúť jeho tvar)
- Potom

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^H(t) + \alpha_k^P(t),$$

konštantu c_k z $\alpha_k^H(t)$ určíme zo začiatočnej podmienky $\alpha_k(0)$

Príklad 2

Video `PDR_T13_04 RVT na intervale (2) nehomogenna s nulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 07.34-14.15,

Zadanie:

- Nehomogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = x(x-1)$ na intervale $(0,1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0,t) = u(1,t) = 0$
- Začiatočná podmienka: $u(x,0) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$

Riešenie:

- Rozvoj začiatočnej podmienky (ako v príklade 1)
$$\alpha_k(0) = 2\int_0^1 x(x-1)(x-\frac{1}{2})\sin(k\pi x)dx =: A_k$$
- Rozvoj pravej strany
$$f_k(t) = 2\int_0^1 x(x-1)\sin(k\pi x)dx =: B_k$$
- ODR pre funkciu $\alpha_k(t)$ je $\dot{\alpha}_k(t) + a^2k^2\pi^2\alpha_k(t) = B_k$

Riešime ODR

$$\dot{\alpha}_k(t) + a^2 k^2 \pi^2 \alpha_k(t) = B_k$$

- všobecné riešenie homogénnej ODR je

$$\alpha_k^H(t) = c_k e^{-a^2 k^2 \pi^2 t}$$

- partikulárne riešenie budeme hľadať konštantné

$$\alpha_k^P(t) = D_k$$

- potom

$$\alpha_k(t) = \alpha^H(t) + \alpha_k^P(t),$$

  pričom konštantu c_k určíme zo začiatočnej podmienky $\alpha_k(0)$

Nakoniec: riešenie máme v tvare sínusového rozvoja

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$$

Príklad 3

Video `PDR_T13_04 RVT na intervale (2) nehomogenna s nulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 14.16-21.13

Zadanie:

- Nehomogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = tx(x-1)$ na intervale $(0,1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0,t) = u(1,t) = 0$
- Začiatočná podmienka: $u(x,0) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$

Riešenie:

- Rozvoj začiatočnej podmienky (ako v príklade 1)

$$\alpha_k(0) = 2\int_0^1 x(x-1)(x-\frac{1}{2})\sin(k\pi x)dx =: A_k$$

- Rozvoj pravej strany (B_k je z príkladu 2)

$$f_k(t) = 2\int_0^1 tx(x-1)\sin(k\pi x)dx =: tB_k$$

- ODR pre funkciu $\alpha_k(t)$ je $\dot{\alpha}_k(t) + a^2k^2\pi^2\alpha_k(t) = B_k t$

Riešime ODR

$$\dot{\alpha}_k(t) + a^2k^2\pi^2\alpha_k(t) = B_k t$$

- všobecné riešenie homogénnej ODR je

$$\alpha_k^H(t) = c_k e^{-a^2k^2\pi^2 t}$$

- partikulárne riešenie budeme hľadať ako lineárnu funkciu

$$\alpha_k^P(t) = D_k + E_k t$$

- potom

$$\alpha_k(t) = \alpha^H(t) + \alpha_k^P(t),$$

  pričom konštantu c_k určíme zo začiatočnej podmienky $\alpha_k(0)$

Nakoniec: riešenie máme v tvare sínusového rozvoja

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$$

Príklady na precvičenie II.

Zadanie:

- Homogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ na intervale $(0,1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0,t) = u(1,t) = 0$
- Začiatočná podmienka: $u(x,0) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$

Pravá strana $f(x,t)$ v jednotlivých príkladoch:

- $f(x,t) = t^2 x(x-1)$
- $f(x,t) = e^{-t} x(x-1)$
- $f(x,t) = \sin(t) x(x-1)$

Príklady na precvičenie III.

Zadanie:

- Homogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = t\sin(2\pi x)$ na intervale $(0, 1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0, t) = u(1, t) = 0$
- Začiatočná podmienka: $u(x, 0) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$

Návod: Pri výpočte $\alpha_k(t)$ treba rozlíšiť prípad $k = 2$ a ostatné k

Príklady na precvičenie IV.

Zadanie:

- Rovnica $u_t - u_{xx} + 2u_x + u = e^x$ na intervale $(0,1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0,t) = u(1,t) = 0$
- Začiatočná podmienka: $u(x,0) = e^x$

Návod: Rovnako ako pri transformácii na RVT na priamke, aj tu sa dá použiť exponenciálna transformácia

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$$

Typ 3. RVT s nenulovými okrajovými podmienkami

Zadanie

- Riešime úlohu

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$

a okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = a(t), u(1,t) = b(t) \quad \text{pre } t > 0$$

Postup riešenia

Video `PDR_T13_05 RVT na intervale (3) s nenulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 00.00-05.57, zhrnutie tohto odvodenia:

- Základnou myšlienkou je **tranformácia, pričom nová funkcia bude mať nulové okrajové podmienky**
- Riešenie hľadáme v tvare

  $$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

  pričom
  - $v(x,t)$ má nulové okrajové podmienky
  - $w(x,t)$ má rovnaké okrajové podmienky ako $u(x,t)$ a je to lineárna funkcia v premennej x, t.j.

    $$w(x,t) = a(t) + [b(t) - a(t)]x$$

- Odvodíme PDR a začiatočnú podmienku pre $v(x,t)$ a túto rovnicu vyriešime

Príklad 4

Video `PDR_T13_05 RVT na intervale (3) s nenulovymi okrajovymi podmienkami`, minúty 07.06-23.45

Zadanie:

- Homogénna RVT $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ na intervale $(0, 1)$
- V krajných bodoch nula: $u(0, t) = \sin(t), u(1, t) = \cos(t)$
- Začiatočná podmienka: $u(x, 0) = x$

Riešenie:

- Transformácia $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, kde $w(x, t)$ je lineárna funkcia premennej x s rovnakými okrajovými podmienkami ako $u(x, t)$:

$$w(x, t) = \sin(t) + [\cos(t) - \sin(t)]x$$

- Potom:

$$u_t = v_t + \cos(t) + [-\sin(t) - \cos(t)]x, u_{xx} = v_{xx}$$

- Z toho dostaneme ODR pre v:

$$v_t - a^2 v_{xx} = -\cos(t) + [\sin(t) + \cos(t)]x$$

- Začiatočná podmienka pre v je:

$$x = u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = v(x,0) + \sin(0) + [\cos(0) - \sin(0)]x$$

$$\Rightarrow v(x,0) = 0$$

- Nulové okrajové podmienky: $v(0,t) = v(1,t) = 0$
- Teda v rieši nehomogénnu RVT s nulovými okrajovými podmienkami $\rightarrow$ typ II. (rovnica, ktorú už vieme riešiť)

Animácia riešenia v R-ku:

- video `PDR_T13_06 Animacia RVT v R-ku (1)` (vzorový jednoduchší príklad animovaného riešenia)
- `PDR_T13_07 Animacia RVT v R-ku (2)` (tento príklad)

Časť II. - dokazovanie vlastností riešenia

Príklad 5. Nerastúcosť zadaného integrálu

Zadanie.

Nech $u(x, t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0, 1]$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

Dokážte nerastúcosť funkcie

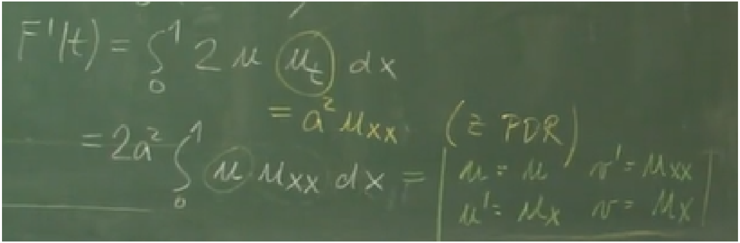
$$F(t) = \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$$

Riešenie vo videu `PDR_T13_09 RVT dokazy (1) nerastucost`, základné myšlienky:

- Absolútna hodnota nemá vplyv na umocnenie

$$F(t) = \int_0^1 |u|^2 dx = \int_0^1 u^2 dx \Rightarrow F'(t) = \int_0^1 2uu_t dx$$

- Využijeme PDR, podľa ktorej $u_t = a^2 u_{xx}$
- Integrujeme súčin $\Rightarrow$ metóda *per partes*
- Využijeme okrajové podmienky, niečo vypadne a zvyšným členom určíme znamienko



Príklad na precvičenie V.

Zadanie.

Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$u_t + u = u_{xx} \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

Dokážte, že
$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u(x,t)|^2 dx$$
je nerastúca funkcia a že pre ňu navyše platí odhad

$$F(t) \le e^{-2t} F(0)$$

Návod: Nerastúcosť sa dokazuje analogicky ako pre RVT v príklade 1, k druhému tvrdeniu:

- vieme ho ekvivalentne zapísať ako:

$$\ln F(t) \leq -2t + \ln F(0)$$

$$\ln F(t) - \ln F(0) \leq -2t$$

- namiesto znamienka derivácie (čo stačilo v prvej časti) potrebujeme odhadnúť jej hodnotu (ak máme odhad derivácie, vieme získať aj odhad funkcie)
- aby sme už nepotrebovali riešenie RVT u, odhad by mal mať tvar

$$F'(t) \leq \dots,$$

kde pravá strana môže obsahovať F, ale nie u
- zrejmé tvrdenie, ale je tu užitočné:

$$\forall s \in (0,t) : f(s) \leq g(s) \Rightarrow \int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t g(s)ds$$

Príklad 6. Konštantné celkové množstvo tepla

Zadanie.

Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

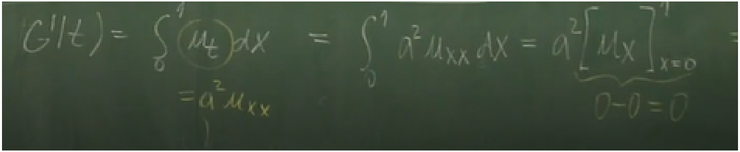
Dokážte, že celkové množstvo tepla

$$G(t) = \int_0^1 u(x,t)dx$$

je konštantné v čase.

Riešenie vo videu `PDR_T13_10 RVT dokazy (2) konstantnost`, základné myšlienky:

- Dokážeme, že $G'(t) = 0$
- Zderivujeme, využijeme PDR a okrajové podmienky - ešte rýchlejšie ako v príklade 1



Dôsledok: Celkové množstvo tepla je v každom čase rovnaké, ako bolo na začiatku:

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u_0(x)dx$$

Príklad 7. Limita riešenia (izolované krajné body)

Zadanie.

Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

Pre každý bod $x \in (0,1)$ určte limitu $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Riešenie vo videu `PDR_T13_11 RVT dokazy (3) limita`, základné myšlienky:

Označme $\tilde{u}(x) := \lim_{t\to\infty} u(x,t)$, potom:

- $\tilde{u}(x)$ spĺňa tú istú PDR, teda $\tilde{u}_t - a^2\tilde{u}_{xx} = 0$, ale $\tilde{u}$ nezávisí od času, takže
$$\tilde{u}_{xx} = 0 \Rightarrow \tilde{u}(x) = Cx + D$$
- $\tilde{u}(x)$ spĺňa tie isté okrajové podmienky, teda $\tilde{u}_x(0) = \tilde{u}_x(1) = 0$:
$$\tilde{u}_x(x) = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \tilde{u}(x) = D$$
- Integrál z riešenia $u(x,t)$ sa podľa predchádzajúceho príkladu rovná v každom čase $\int_0^1 u_0(x)dx$, to isté platí aj pre $\tilde{u}(x)$:
$$\int_0^1 \tilde{u}(x)dx = \int_0^1 u_0(x)dx \Rightarrow D = \int_0^1 u_0(x)dx$$

Príklad na precvičenie VI.: Limita riešenia (konštantná teplota v krajných bodoch)

Zadanie.

Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = A, u(1,t) = B \quad \text{pre } t > 0$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ sú konštanty. Pre každý bod $x \in (0,1)$ určte limitu $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Návod: Rovnako ako v príklade 3 dokážte, že limita je lineárna funkcia x. Potom využite jej okrajové podmienky v bodoch $x = 0$ a $x = 1$.

Príklad na precvičenie VII.: Výpočet riešenia (izolované krajné body)

Zadanie.

Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice vedenia tepla

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

Odvoďte postup pre výpočet riešenia $u(x,t)$.

Návod: Riešenie budeme hľadať v tvare kosínusového radu

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos(k\pi x).$$

Okrajové podmienky tak budú určite splnené. Odvodenie ODR a začiatočných podmienok pre $\beta_k(t)$ je analogické ako v prípade sínusového rozvoja riešenia pre RVT s nulovými funkčnými hodnotami v krajných bodoch.