Príklady na precvičenie, cvičenie 7

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2024

14. novembra 2024

Príklady sa neodovzdávajú, je možné prísť so svojim pokusom/riešením na konzultácie.

Vo všetkých príkladoch sa zaoberáme rovnicou

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Rovnica vedenia tepla na priamke: príklady z cvičenia

1. Dokončite výpočet riešenia pre začiatočnú podmienku $u_0(x) = \sin^3 x$
2. Dokážte,že riešenie so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = \sin^4 x$ je pre každé $t > 0$ ostro kladné vo všetkých bodoch $x \in \mathbb{R}$.
3. Dokážte,že riešenie so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = x^{101}$ je v každom čase rastúcou funkciou premennej x.

Rovnica vedenia tepla na priamke: pokračovanie

4. Nájdite riešenie pre začiatočnú podmienku $u_0(x) = \sin(3x)\sin(2x)$.
5. Nájdite riešenie pre začiatočnú podmienku $u_0(x) = \sin(3x)\cos(5x)$.
6. Nech $u(x, t)$ je riešenie so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = \max(0, 1 - |x|)$. Pre každé $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu. $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx$. *(Nestačí povedať, že „na cvičení sme dokázali...“, na písomke aj na skúške treba spraviť celé odvodenie.)*
7. Nech $u(x, t)$ je riešenie so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = |\sin(2x)|$.
   (a) Dokážte, že $0 < u(x, t) < 1$ je pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Dokážte, že $u(x, t)$ je pre každé $t > 0$ periodickou funkciou premennej x
8. Nájdite riešenie pre začiatočnú podmienku $u_0(x) = x^3$.