Príklady na precvičenie, cvičenie 10

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2024

5. decembra 2024

Príklady sa neodovzdávajú, je možné prísť so svojim pokusom/riešením na konzultácie.

Rovnica vedenia tepla na priamke: príklady z cvičenia

1. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}x(x-1) \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = x(x-1) \text{ pre } x \in [0,1]$$
a okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$

2. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = 0 \text{ pre } x \in [0,1]$$
a okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = \sin(t), u(1,t) = 1 \text{ pre } t > 0.$$

3. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) \text{ pre } x \in [0,1]$$
a okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$
Návod: Začiatočná podmienka už je v tvare sínusového rozvoja (ktorý ma v tomto prípade len konečne veľa nenulových členov).

4. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = \sin(2\pi x)\cos(3\pi x) \text{ pre } x \in [0,1]$$
a okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$
Návod: Odvoďte si trigonometrickú identitu, vďaka ktorej nebude potrebné počítať integrál zo začiatočnej podmienky.

5. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = u_0(x) \text{ pre } x \in [0,1]$$
a okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$
Dokážte, že $F(t) = \int_0^1 |u(x,t)|^2 dx$ je nerastúca funkcia premennej t.

6. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$
so začiatočnou podmienkou
$$u(x,0) = u_0(x) \text{ pre } x \in [0,1]$$
a okrajovými podmienkami vyjadrujúcimi izolované krajné body
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$
Dokážte, že celkové množstvo tepla $F(t) = \int_0^1 u(x,t)dx$ sa nemení v čase.

Pokračovanie

Rovnakou trasformáciou ako v prípade RVT na priamke, teda
$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$$
sa dá riešiť aj úloha
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu = f(x,t) \text{ pre } x \in (0,1), t > 0.$$
Aj teraz konštanty α, β určíme tak aby funkcia $v(x,t)$ splňala RVT.

7. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u = 1 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = x \text{ pre } x \in [0,1]$$

a okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$

V prípade okrajových podmienok

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \textit{ pre } t > 0$$

budeme riešenie rozvíjať do kosínusového radu

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) \cos(k\pi x).$$

8. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = x \text{ pre } x \in [0,1]$$

a okrajovými podmienkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0$$

a limitu riešenia pre $t \to \infty$. *Fyzikálna intuícia pre limitu: Pri izolovaných krajných bodoch sa teplota stabilizuje na konštantnej hodnote, pričom celkové množstvo tepla pre túto limitnú funkciu bude rovnaké ako celkové teplo na začiatku.*

9. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in (0,1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = x^2 \text{ pre } x \in [0,1]$$

a okrajovými podmienkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$

Pre každý čas $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu $F(t) = \int_0^1 u(x,t)dx$.

Poznámka: Nehľadajte riešenie, ale dokážte vlastnosť, ktorá vám umožní nájsť hľadanú hodnotu integrálu.