

Vzorová písomka 1

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2024

Písomka je closed-book, bez poznámok, telefónov, smart hodínok a pod.

1. [4 body] Nájdite všeobecné riešenie $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 2024,$$

ktoré má tvar $u(x_1, \dots, x_n) = f(r)$, kde r je vzdialenosť bodu $(x_1, \dots, x_n)$ od začiatku súradnicového systému, teda $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Rozlíšte prípady $n = 2$ a $n \geq 3$. Potom nájdite také riešenie, ktoré má na guľi so stredom v nule a s polomerom 1 hodnotu 2024.

2. [4 body] Nájdite riešenie $u(x, y)$ rovnice

$$u(x+y) \frac{\partial u}{\partial x} + u(x-y) \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

ktoré spĺňa podmienku $u = 0$ pre $y = 2x$.

3. [4 body] Nájdite riešenie $u(x, y)$ rovnice

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u + 1,$$

ktoré spĺňa podmienku $u(x, 0) = x^2$.

4. [4 body] Nájdite riešenie $u(x, y)$ rovnice

$$2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

ktoré spĺňa podmienku $u(x, 2x) = x^2$.

5. [4 body] Nájdite všeobecné riešenie $u(x, y, z)$ rovnice

$$x(y-z) \frac{\partial u}{\partial x} + y(z-x) \frac{\partial u}{\partial y} + z(x-y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$