

Vzorová písomka 2

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2024

Písomka je closed-book, bez poznámok, telefónov, smart hodínok a pod.

1. [4 body] Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \text{ pre } x \in (0, 1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = 0 \text{ pre } x \in [0, 1]$$

a okrajovými podmienkami

$$u(0, t) = 1, u(1, t) = t \text{ pre } t > 0.$$

2. [4 body] Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{3x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = \cos(3\pi x) \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

3. [4 body] Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-2024t} x^{2024} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = x^{2024} \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že $u(x, t)$ je pre každé $t > 0$ konvexnou funkciou premennej x .

4. [4 body] Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = e^{-\frac{1}{2024}x^2} \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ je pre každé $t > 0$.

5. [4 body] Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in (0, 1), t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = \sin(20\pi x) \cos(24\pi x) \text{ pre } x \in [0, 1]$$

a okrajovými podmienkami

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 \text{ pre } t > 0.$$