

Homogénna rovnica vedenia tepla na priamke

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice

VÝPOČET RIEŠENIA

V príkladoch 1-9 riešime rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Nájdite riešenie pre nasledovné začiatočné podmienky

1. $u_0(x) = e^{-2x^2}$
2. $u_0(x) = 42$
3. $u_0(x) = (2x - 1)^2$
4. $u_0(x) = e^{1+3x}$
5. $u_0(x) = e^{-4x}$
6. $u_0(x) = \sin(3x) - 2 \cos(4x)$
7. $u_0(x) = \sin(3x) + e^{-3x} + 3$
8. $u_0(x) = \sin(3x) \sin(2x) - \cos(3x) \cos(2x)$
9. $u_0(x) = 2 \cos(x) \cos(4x) - \cos(3x)$

V príkladoch 2-7 spravte skúšku (teda overte, či riešenie spĺňa zadanú rovnicu a začiatočnú podmienku).

DOKAZOVANIE VLASTNOSTÍ

V príkladoch 10-14 uvažujeme rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

10. Nech $u(x, t)$ je riešenie so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = x^{2025}$. Dokážte, že $u(x, t)$ je pre každé $t > 0$ a rastúcou funkciou premennej x .

11. Nech $u(x, t)$ je riešenie so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = x^{2026}$. Dokážte, že $u(x, t)$ je pre každé $t > 0$ konvexnou funkciou premennej x .
12. Nájdite príklad takej začiatočnej podmienky $u(x, 0)$, aby riešenie $u(x, t)$ bolo pre každé $t > 0$ klesajúcou konvexnou funkciou premennej x . Dokážte, že riešenie má tieto vlastnosti
13. Nech $u(x, t)$ je riešenie so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = \max(0, x(1 - x))$.
- (a) Dokážte, že $u(x, t) > 0$ je pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Pre každé $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu. $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$. (Nestačí povedať, že „na cvičení sme dokázali...“, na písomke aj na skúške treba spraviť celé odvodenie.)
14. Nech $u(x, t)$ je riešenie so začiatočnou podmienkou $u_0(x) = \sin^3 x$.
- (a) Dokážte, že $-1 < u(x, t) < 1$ je pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Dokážte, že $u(x, t)$ je pre každé $t > 0$ nepárnu funkciou premennej x .
- (c) Dokážte, že $u(x, t)$ je pre každé $t > 0$ periodickou funkciou premennej x

TRANSFORMÁCIA NA ROVNICU VEDENIA TEPLA

15. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = x^2 \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

16. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 4u = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = e^{2x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

17. Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 4u = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Pre každý čas $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$.