

Písomka 1

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice

Písomka je closed-book, bez poznámok, telefónov, smart hodínok a pod.

1. [4 body] Nájdite všeobecné riešenie $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = x^{2024},$$

ktoré má tvar $u(x_1, \dots, x_n) = f(r)$, kde r je vzdialenosť bodu $(x_1, \dots, x_n)$ od začiatku súradnicového systému, teda $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Rozlíšte prípady $n = 2$ a $n \geq 3$. Potom nájdite také riešenie, ktoré má na guľi so stredom v nule a s polomerom 1 hodnotu 1.

2. [4 body] Nájdite všeobecné riešenie $u(x, y, z)$ rovnice

$$e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + ye^x \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

3. [4 body] Nájdite riešenie $u(x, y)$ rovnice

$$(x^2 - 2xy) \frac{\partial u}{\partial x} + (2xy - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

ktoré spĺňa podmienku $u(2x, x) = x$.

4. [4 body] Nájdite riešenie $u(x, y)$ rovnice

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2,$$

ktoré spĺňa podmienku $u(x, -2) = x - x^2$.

5. [4 body] Nájdite všeobecné riešenie $u(x, y)$ rovnice

$$(x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u.$$