

CVIČENIA Z PDR 2005/2006

DOMÁCA ÚLOHA 6  
TERMÍN ODOVZDANIA: 10.11.2005

Za správne riešenie ľubovoľného príkladu je 1 bod. Odovzdať môžete aj viac príkladov, maximálne však môžete získať jeden bod.

1. Nájdite riešenie  $z = z(x, y)$  rovnice

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2 + z^2,$$

ktoré spĺňa  $z(1, y) = y^2$ .

2. Nájdite riešenie  $z = z(x, y)$  rovnice

$$(2z - 3y) \frac{\partial z}{\partial x} + (3x - z) \frac{\partial z}{\partial y} = y - 2x,$$

ktoré spĺňa  $z(x, x) = 0$ .

3. **Model dopravnej premávky**

Autá sa pohybujú po priamke (nekonečne dlhej diaľnici). Stav v čase  $t$  popíšeme funkciou  $\rho(t, x)$ , ktorá udáva hustotu áut v čase  $t$  v bode  $x$  (t.j. počet áut na intervale  $[a, b]$  v čase  $t$  je  $\int_a^b \rho(t, x) dx$ ). Auto, ktoré sa v čase  $t$  nachádza v bode  $x$ , sa pohybuje rýchlosťou

$$v = v_{max} \left( 1 - \frac{\rho(t, x)}{\rho_{max}} \right), \quad (1)$$

kde  $v_{max}$  a  $\rho_{max}$  sú dané konštanty. Ak sa hustota rovná  $\rho_{max}$ , autá sú tesne vedľa seba a nemôžu sa pohybovať, t.j.  $v = 0$ . Ak sa hustota blíži k nule, rýchlosť  $v$  sa blíži k maximálnej rýchlosti  $v_{max}$ . Ak predpokladáme lineárnu závislosť rýchlosti od hustoty, dostaneme vzťah (1).

Rovnica vyjadrujúca vývoj hustoty  $\rho$  je rovnaká ako rovnica vyjadrujúca zákon zachovania hmoty (zákon zachovania hmoty: rozdiel medzi vtokom a výtokom hmoty cez určitý interval je kompenzovaný zmenou hustoty hmoty; tento príklad: rozdiel medzi počtom áut, ktoré vošli a ktoré vyšli z daného intervalu je kompenzovaný zmenou hustoty áut):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Dosaďte rýchlosť  $v$  do rovnice (2) a nájdite implicitný vzťah definujúci jej riešenie.