Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Pravdepodobnosť: domáca úloha 1

Termín odovzdania: 4. marec 2015

Odovzdávanie domácej úlohy:

- Riešenia je možné odovzdať *osobne na začiatku cvičenia* alebo *mailom* na adresu `beata.ulohy@gmail.com` s predmetom `pravdepodobnost 2015 - DU1 - priezvisko`. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať. V prípade odovzdávania mailom riešenia spíšte do textového súboru alebo ich odfoťte (dostatočne kvalitne, aby bol text čitateľný) a skonvertujte do `pdf` formátu (dá sa to spraviť aj online).
- Pri riešení domácich úloh môžete spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- Spolu s prvou domácou úlohou do mailu napíšte, *akým spôsobom chcete mať zverejňované body na webe* - meno a priezvisko alebo číselný kód (napíšte aký).

Zadania príkladov:
Odovzdať môžete aj viac príkladov, maximálne však môžete za DÚ získať 30 bodov, čo zodpovedá plnému počtu bodov za dva príklady.

1. *(15 bodov)* Vráťme sa k príkladu z cvičenia o zhodách vyložených kariet, pričom uvažujeme "všeobecný balíček kariet". Máme teda n rôznych kariet (bez ujmy na všeobecnosti môžeme označiť ich hodnoty $1, 2, 3, \ldots, n$), ktoré zamiešame a postupne otáčame. Pritom postupne hovoríme vzostupné hodnoty kariet: $1, 2, 3, \ldots$, atď. - pri každej otočenej karte jednu hodnotu. Ak sa vyslovená hodnota zhoduje s hodnotou otočenej karty, hráč získava túto kartu.

   Na stránke `https://bs81.shinyapps.io/zhody` je aplikácia[1], ktorá umožňuje robiť simulácie - simulovať priebehy takejto hry. Volia sa parametre:

   - počet kariet, v našom značení n - parameter `Karty`,
   - počet simulácií, teda počet opakovaní hry - parameter `Opakovania`.

   Výstupom je graf vpravo, ktorý zobrazuje, koľkokrát v zrealizovaných simuláciách nastalo $0, 1, 2, \ldots, n$ zhôd, teda koľkokrát v jednotlivých hrách získal hráč $0, 1, 2, \ldots, n$ kariet. Ukážky sú na str. 12-13 slajdov k cvičeniu.

   Zvoľte si počet kariet a počet simulácií a zo získaného grafu vypočítajte priemerný počet kariet, ktoré hráč v týchto hrách získal. Výpočet potom zopakujte pre iný počet kariet. V riešení uveďte aj zosnímané obrazovky s výsledkami simulácií, na základe ktorých ste priemery počítali.

[1] Môže sa stať, že pozadie bude sivé, v takom prípade treba stránku načítať ešte raz.

2. *(15 bodov)* V rubrike *Ask Marilyn* odpovedá na otázky čitateľov Marilyn vos Savant, ktorá bola istý čas zapísaná v Guinesovej knihe rekordov ako človek s najvyšším IQ. Otázkami sú často matematické úlohy, medzi nimi bola aj táto:

   > A high school student who hadn't opened his American history book in weeks was dismayed to walk into dass and be greeted with a pop quiz. It was in the form of two lists, one naming the 24 Presidents in office during the 19th century in alphabetical order and another list noting their terms in office, but scrambled. The object was to match the Presidents with their terms. The completely clueless student had to guess every time. On average, how many did he guess correctly?

   Uvažujme nasledovné dve možnosti:

   (a) Študent priraďuje roky k prezidentom tak, že každému menu je priradené práve jedno obdobie a každé takéto priradenie má rovnakú pravdepodobnosť.

   (b) Študent priraďuje roky k prezidentom tak, že každému menu priradí jedno z období, pričom každé obdobie vyberie s rovnakou pravdepodobnosťou a nezávisle od predchádzajúcich odpovedí (môže sa teda stať, že niekoľkým prezidentom bude priradené to isté obdobie v úrade).

   Pre každú z nich vypočítajte strednú hodnotu počtu správnych odpovedí.

3. *(15 bodov)* Dvaja hráči zoberú balíček 52 kariet (2, 3, …, A, pričom z každej hodnoty sú v balíčku štyri farby), zamiešajú ho a striedavo zvrchu odoberajú karty. Vyhráva ten, kto nájde prvé eso. Určte pravdepodobnosti výhry každého z hráčov. Uveďte postup výpočtu a výsledné pravdepodobnosti zaokrúhlené na 4 desatinné miesta.

   Nezaokrúhľujte priebežné medzivýsledky, pravdepodobnosť v tvare 0,$abcd$ musí mať správne hodnoty a, b, c, d.

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Kombinatorická pravdepodobnosť: ďalšie príklady na precvičenie

Za riešenie príkladov na precvičenie nie sú body do hodnotenia, ale je možné odovzdať ich na cvičení na kontrolu. Opravené budú vrátené na nasledujúcom cvičení. Podobné príklady budú na písomke.

1. Nasledujúci príklad pochádza z matematickej súťaže *Green Chicken* medzi Williams College a Middlebury College. Informácie o histórii aj súčasnosti súťaže (napríklad aj o tom, ako sa zelené kura na obrázku stalo cenou pre víťaza) sa dajú nájsť na `http://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/greenchicken/`.

Obr. 1: Putovná cena v súťaži *Green Chicken*

   Nevyvážená minca je taká, pri hode ktorej pravdepodobnosť, že padne hlava nemusí byt rovnaká ako pravdepodobnost, že padne znak. Ukážte, že sa nedajú vyrobit dve nevyvážené mince (nemusia mať rovnaké pravdepodobnosti padnutia hlavy) tak, aby nasledujúce tri udalosti mali rovnakú pravdepodobnosť: na oboch padnú hlavy, na jednej padne hlava a na druhej znak a na oboch padnú znaky.

2. Vráťme sa k príkladu 5 z cvičenia o fotoaparátoch. Máme teda 20 fotoaparátov, medzi ktorými sú na náhodných miestach 3 pokazené a my ich potrebujeme nájsť. Robíme to tak, že kontrolujeme jeden fotoaparát za druhým.

   Uvedomme si teraz, že nikdy nemusíme kontrolovať všetkých 20 fotoaparátov - ak sme totiž medzi prvými 19 našli len dva pokazené, je jasné, že ten hľadaný tretí je na 20. mieste. Podobne, ak sme medzi prvými 17 nenašli žiadny pokazený, takisto nemusíme pokračovať - pokazené fotoaparáty sú na miestach 18, 19, 20.

Označme teraz Y počet fotoaparátov, ktoré musíme skontrolovať, aby sme vedeli identifikovať tie pokazené; Y teda nadobúda hodnoty 3, 4, …, 19. Nech X je poloha posledného pokazeného fotoaparátu (ako na cvičení).

- Vysvetlite, prečo $P(Y = k) = P(X = k)$ pre $k = 3, 4, \ldots, 16$
- Vyjadrite $P(Y = k)$ pre $k = 17, 18, 19$.
- Vypočítajte numerické hodnoty pravdepodobností jednotlivých hodnôt Y a zistite, ktorá má najväčšiu pravdepodobnosť.

3. Stará čínska hra *mang kung* sa hrá so šiestimi špeciálnymi kockami: každá kocka má päť stien neoznačených. Na poslednej stene má prvá kocka jednu bodku, druhá kocka dve, tretia tri, štvrtá štyri, piata päť a šiesta šesť. Ak pri hode kockou padne neoznačená stena, počíta sa ako nula. Hodíme týmito šiestimi kockami. Aká je stredná hodnota súčtu bodiek, ktoré na nich padnú?

4. Nasledovnou úlohou sa zaoberal Isaac Newton, keď mu Samuel Pepys poslal list s otázkou:

   > Hráč A má 6 kociek a chce hodiť aspoň jednu šestku. Hráč B má 12 kociek a chce hodiť aspoň dve šestky. Hráč C má 18 kociek a chce hodiť aspoň tri šestky. Kto z nich má najväčšiu pravdepodobnosť, že sa mu jeho cieľ podarí splniť?

   Úloha je známa ako *Newton-Pepys problem*, o zovšeobecnení pre $6n$ kociek sa píše napríklad na `http://mathworld.wolfram.com/Newton-PepysProblem.html`