

Kombinatorická pravdepodobnosť (opakovanie)

Metódy riešenia úloh
z pravdepodobnosti a štatistiky

Cvičenie 1

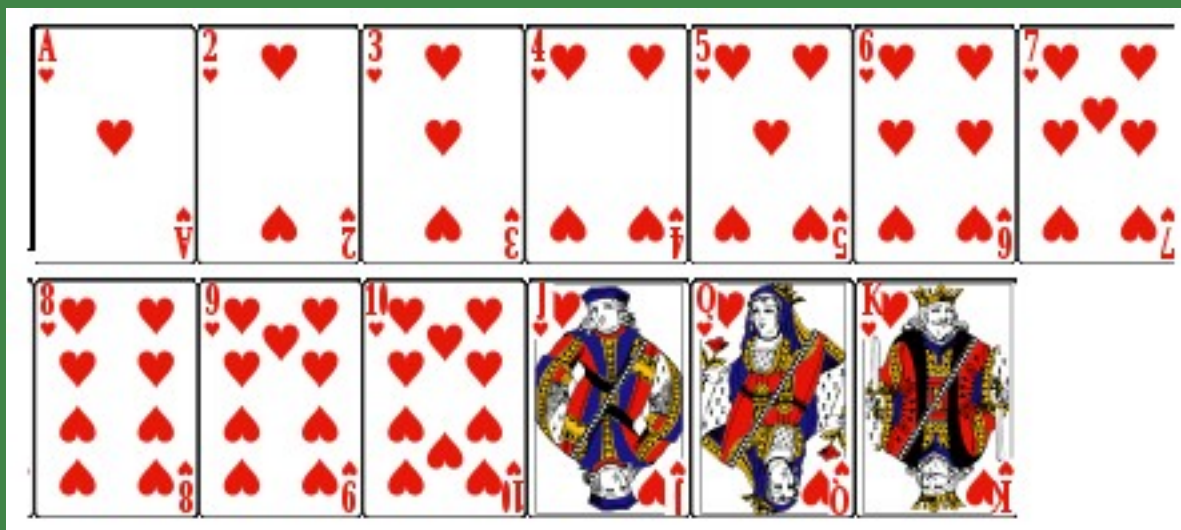
Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Zoberieme karty jednej farby:



- ♦ Zamiešame.



Príklad 1: Zhody kariet

- Po jednom ich otáčame, pričom súčasne hovoríme poradie kariet:

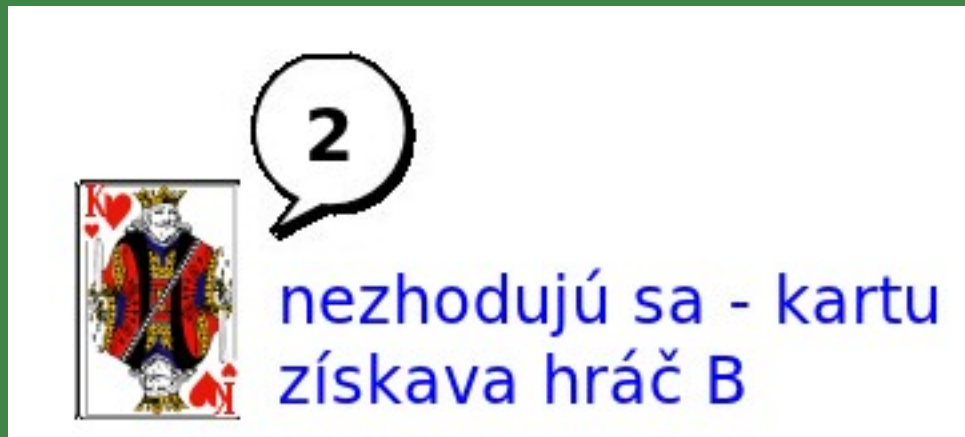
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

- Ak nastane zhoda medzi vyloženou a vyslovenou kartou, kartu získava hráč A. Inak ju získava hráč B.
- Vyhráva ten, kto má na konci viac kariet.



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry:
 - ♦ Otočíme prvú kartu, hovoríme: „2“
 - ♦ Napríklad:



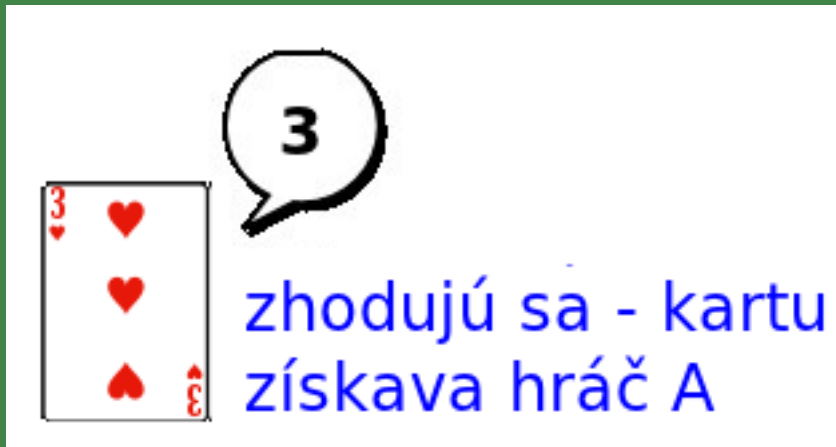
2

nezhodujú sa - kartu
získava hráč B



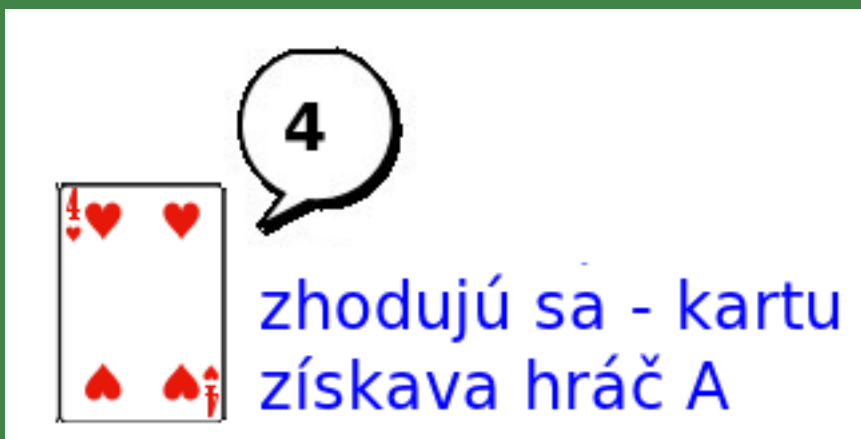
Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry – pokračovanie:
 - ♦ Otočíme ďalšiu kartu, hovoríme: „3“
 - ♦ Napríklad:



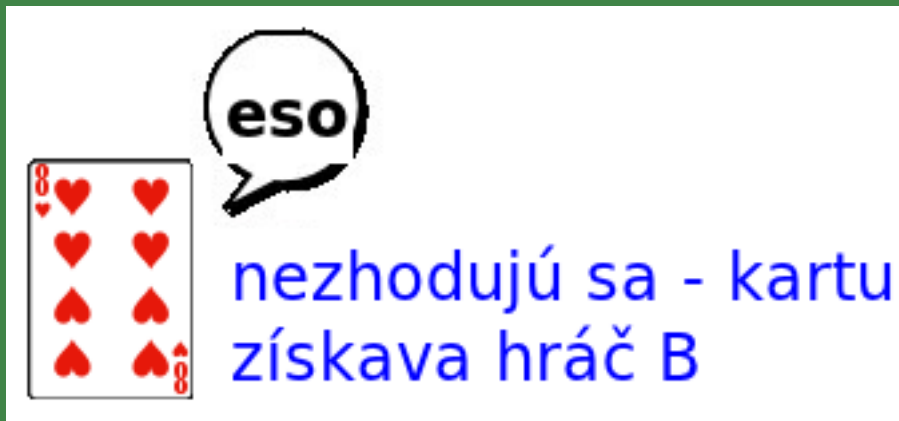
Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry – pokračovanie:
 - ♦ Otočíme ďalšiu kartu, hovoríme „4“
 - ♦ Napríklad:



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry – pokračovanie:
 - ♦ Rovnako pokračujeme ďalej
 - ♦ Nakoniec otočíme poslednú kartu, hovoríme „eso“
 - ♦ Napríklad:



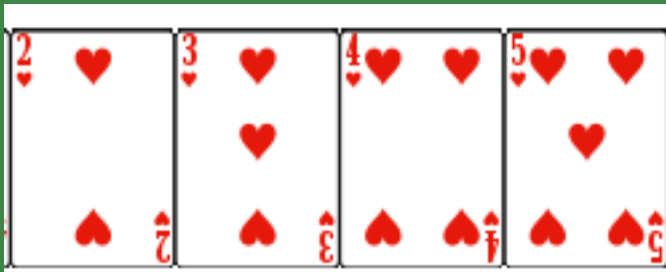
Príklad 1: Zhody kariet

- Je hra spravodlivá, t. j. majú hráči rovnakú pravdepodobnosť výhry?
- Zahráme si skrátenú verziu hry – so štyrmi kartami



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Skrátená verzia hry – so štyrmi kartami



- ♦ Pre každú odohranú hru zapíšte do tabuľky počet kariet, ktorý získali jednotliví hráči



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Vypočítame:
 - ♦ pravdepodobnosť, že hráč A má na konci hry 0, 1, 2, 3, 4 karty
 - ♦ pravdepodobnosť, že hráč A vyhrá
- ♦ Modifikácia hry – hráč získava toľko bodov, koľko má kariet
 - ♦ aký je očakávaný počet bodov hráča A a hráča B?



Príklad 1: Zhody kariet

- ◆ Doplníte tabuľku:

poradie kariet				hráč A	hráč B	víťaz
2	3	4	5	4	0	A
2	3	5	4	2	2	X
2	4	3	5	2	2	X
2	4	5	3	1	3	B
2	5	3	4			
2	5	4	3			
3	2	4	5			

- ◆ Porovnávame s **2, 3, 4, 5**



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Čo sa zmení, ak zoberieme:
 - ♦ všetky karty 2, 3, ..., K, A?
 - ♦ sedmové karty?
 - ♦ jednu sadu zo „všeobecného balíčka“, ktorý má n typov kariet?
- ♦ Súčasť DÚ:
 - ♦ vyskúšajte simulácie tejto hry na <https://bs81.shinyapps.io/zhody>



Príklad 1: Zhody kariet

- Simulácie na stránke – zadávame počet kariet a počet opakovaní hry

Parametre

Karty: 3 8 20

Opakovania: 1,000 2,000 5,000

8 kariet (napr. sedmové karty)

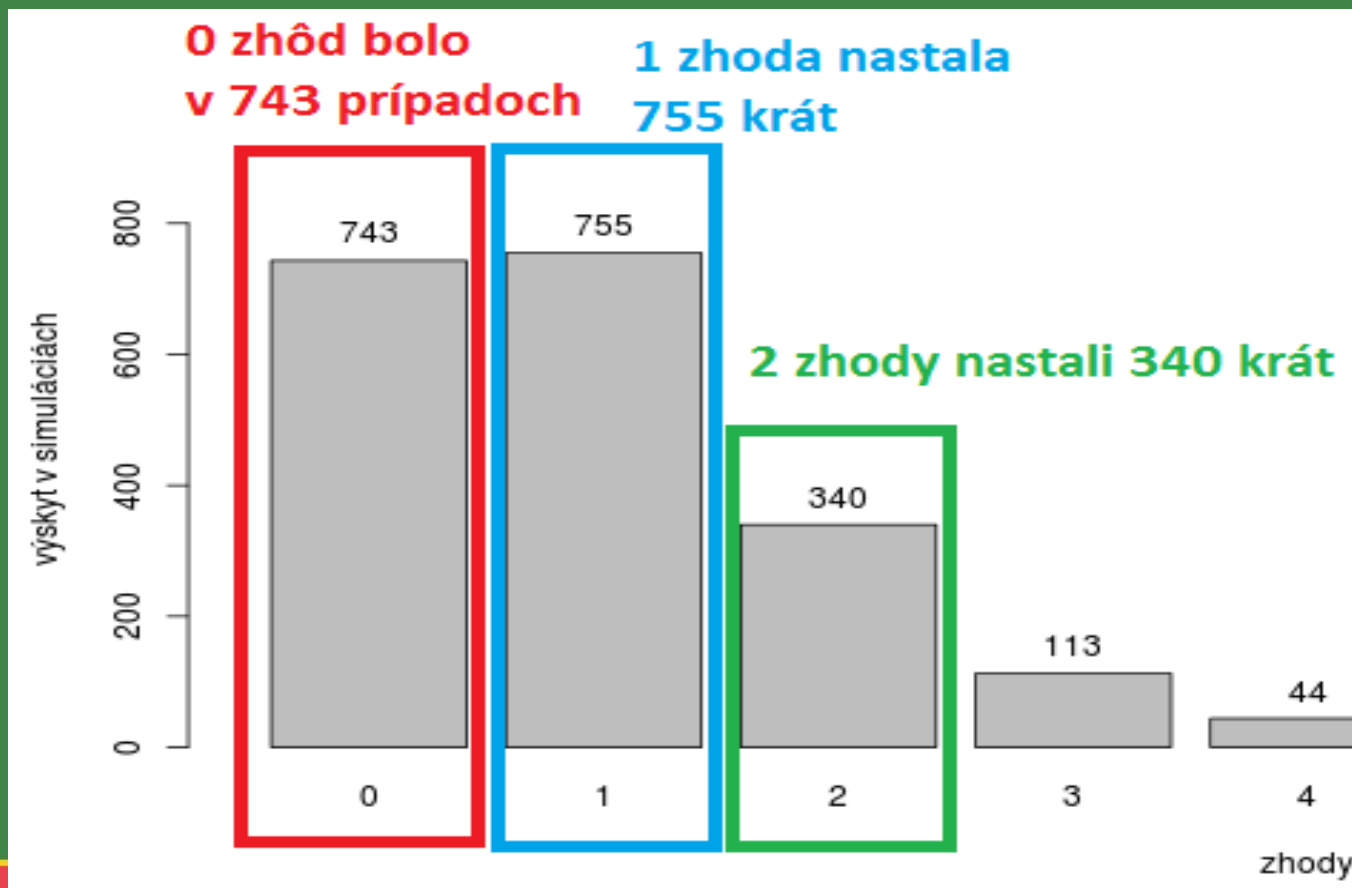
hru opakujeme 2000 krát

výskyt v simuláciách



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Simulácie na stránke – ukážka výstupu:



Z domácej úlohy

- ♦ V inej podobe – súčasť DÚ
 - ♦ Rubrika *Ask Marilyn* - otázky čitateľov časopisu, odpovedá Marilyn vos Savant
 - ♦ Časté sú matematické úlohy, jedna z nich v DÚ

John Adams	1797-1801
James Madison	1801-1809
Ulysses S. Grant	1809-1817
Andrew Jackson	1817-1825
John Quincy Adams	1825-1829
James Buchanan
.....

<http://marilynvossavant.com>



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Zamiešame balíček kariet (hodnoty 2, 3, ..., 10, ..., A; farby ♠, ♣, ♥, ♦)
- ♦ Každé z $52!$ možných usporiadaní kariet je rovnako pravdepodobné
- ♦ Zamiešanie s určitou vlastnosťou (napr. „prvé dve karty sú esá“) má pravdepodobnosť m/n , kde
 - ♦ m = počet priaznivých možností
 - ♦ n = počet všetkých možností ($52!$)



Príklad 2: Rozcvička



Kto nájde súvislosť obrázku s otázkami? ;-)

- ♦ Aká je pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí?
 - ♦ Prvá karta je piková dáma.
 - ♦ Prvá karta je eso.



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Aká je pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí?
 - ♦ Prvá karta je srdcové eso a druhá karta je piková.
 - ♦ Prvé tri karty sú srdcové
 - ♦ Prvá aj posledná karta je dvojka.
 - ♦ Všetky desiatky sú na nepárnych pozíciách (prvé, tretie, piate, ... miesto v balíčku).



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Z balíčka kariet náhodne vytiahneme dve karty (nezáleží nám na poradí vytiahnutia).
- ♦ Každá dvojica má rovnakú pravdepodobnosť
- ♦ Výber s určitou vlastnosťou má pravdepodobnosť m/n , kde
 - ♦ m = počet priaznivých možností
 - ♦ n = počet všetkých možností, čo je $52 \cdot 51 / 2$



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Aká je v tejto situácii pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí?
 - ♦ Obidve karty sú esá.
 - ♦ Obidve karty majú rovnakú hodnotu.
- ♦ Z balíčka kariet náhodne vytiahneme dve karty (záleží aj na poradí ich vytiahnutia).
 - ♦ Aká je pravdepodobnosť, že prvá karta je eso, ale druhá nie je?



Príklad 3: Rovnaké farby

- ♦ Balíček kariet, medzi nimi je m čiernych a n červených.
- ♦ Náhodne vyberieme dve karty.
- ♦ Aká je pravdepodobnosť, že majú rovnakú farbu?
- ♦ Nech $m = n$ (rovnaký počet)
Vypočítajte limitu pravdepodobnosti, ak tento počet ide do nekonečna.



Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ Znovu karty 2, 3, ..., A
- ♦ Aká je pravdepodobnosť toho, že prvé eso je na k -tom mieste?
 - ♦ Možné hodnoty k sú 1, 2, ..., 48
 - ♦ Aké sú ich pravdepodobnosti?
- ♦ Aká je pravdepodobnosť toho, že posledné eso je na k -tom mieste?
 - ♦ Možné hodnoty k sú 4, 2, ..., 52
 - ♦ Aké sú ich pravdepodobnosti?



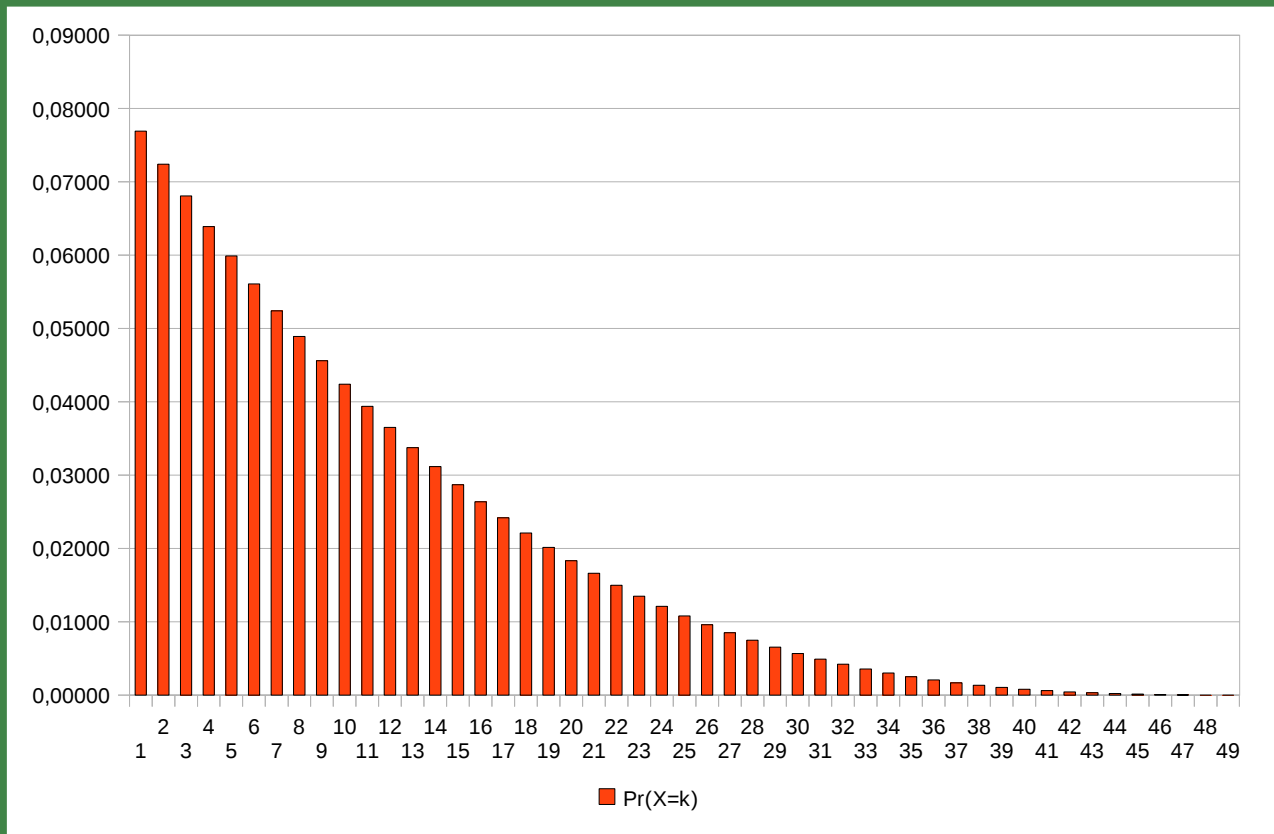
Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ „Začiatocné nadšenie“
 - ♦ Otáčame karty, kým nenájdeme prvé eso
 - ♦ X = miesto, na ktorom je prvé eso
 - ♦ Ktorá hodnota náhodnej premennej X má najväčšiu pravdepodobnosť?



Príklad 4: Kde sú esá?

- ◆ X = miesto, na ktorom je prvé eso



- ◆ Binomické koeficienty v *Open Office Calc* a *MS Excel*: funkcia **COMBIN($n;k$)**
- ◆ Výpočet a graf v ods/xls súbore na stránke



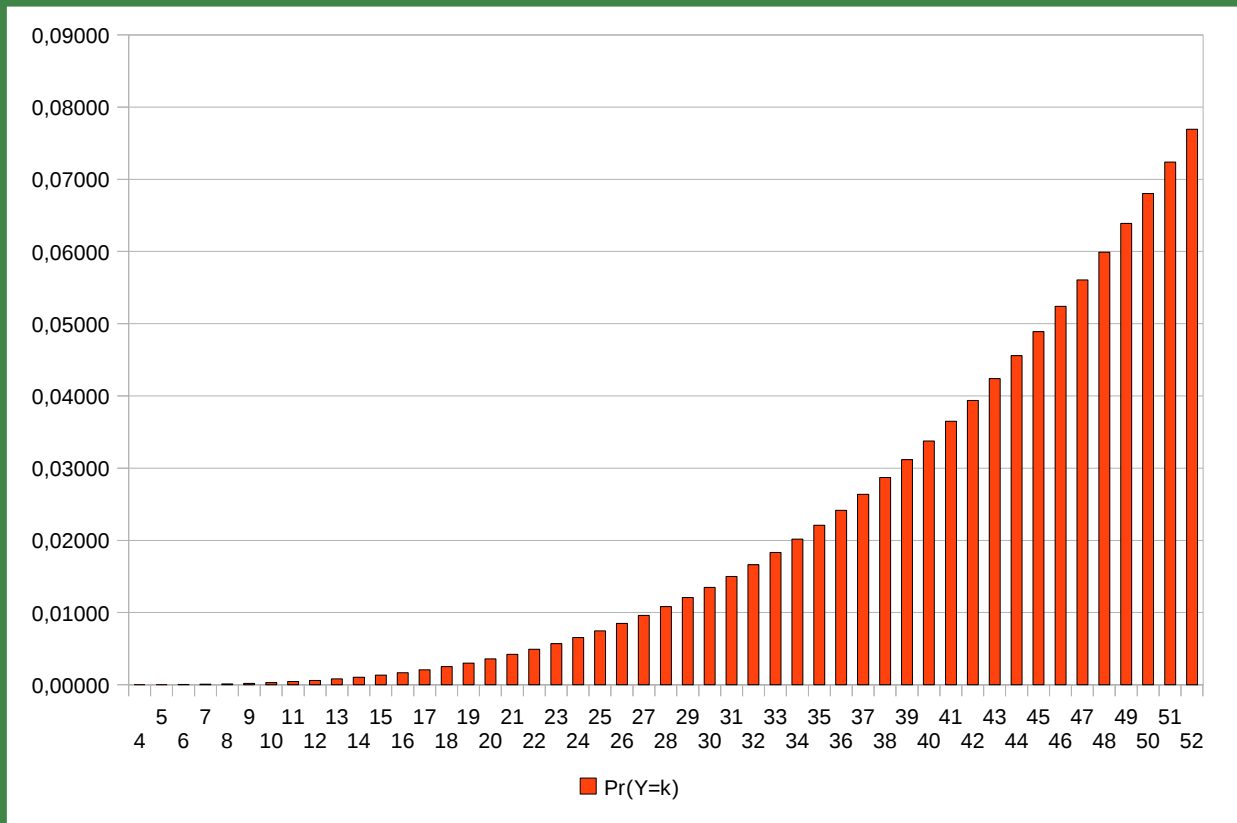
Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ „Zákon schválnosti“
 - ♦ Otáčame karty, kým nenájdeme všetky esá
 - ♦ Y = miesto, na ktorom je posledné eso
 - ♦ Ktorá hodnota náhodnej premennej Y má najväčšiu pravdepodobnosť?



Príklad 4: Kde sú esá?

- ◆ Y = miesto, na ktorom je posledné eso



Príklad 5: Fotoaparáty

- Medzi 20 fotoaparátov sa zamiešali 3 pokazené, ich umiestnenie je náhodné. Kontrolujeme ich jeden za druhým.
- Nech X je poradie, na ktorom sa nachádza posledný pokazený fotoaparát.
- Ktorá hodnota X má najväčšiu pravdepodobnosť?



Budúci týždeň: spoločný bonus

- ♦ Dostanete 10 fialových a 10 ružových hviezdičiek
- ♦ Rozdelíte ich do dvoch vrecúšok – *dohodnute sa, ako*
- ♦ Náhodne sa vyberie jedno z vrecúšok a potom z neho náhodne jedna guľôčka
- ♦ Ak bude fialová, získa každý prítomný 5 bonusových bodov

