

Spojité náhodné vektory

Metódy riešenia úloh
z pravdepodobnosti a štatistiky
Cvičenie 4



Príklad 1 (SOA): Doba fungovania prístroja I.

- Ďalší z príkladov zo skúšok *Society of Actuaries*
- Fungovanie prístroja:
 - Skladá sa z dvoch častí
 - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
 - Doba životnosti (v hodinách) týchto dvoch častí je náhodný vektor (S, T) s hustotou $f(s, t)$ pre $0 < s < 1$, $0 < t < 1$



Príklad 1 (SOA): Doba fungovania prístroja I.

- Aká je pravdepodobnosť, že prístroj prestane fungovať počas prvej polhodiny?

$$(A) \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(B) \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(C) \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt$$

$$(D) \int_0^{0.5} \int_0^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

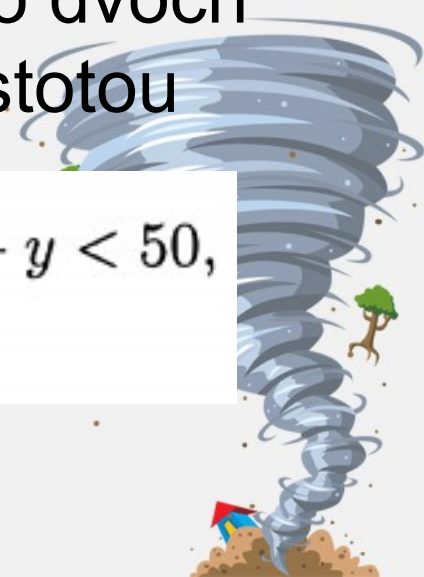
$$(E) \int_0^{0.5} \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$



Príklad 2 (SOA): Doba fungovania prístroja II.

- Fungovanie prístroja:
 - Skladá sa z dvoch častí
 - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
 - Doba životnosti (v mesiacoch) týchto dvoch častí je náhodný vektor (X, Y) s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{125,000} (50 - x - y) & \text{pre } 0 < x < 50 - y < 50, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$



Príklad 2 (SOA): Doba fungovania prístroja II.

- Aká je pravdepodobnosť, že po 20 mesiacoch prístroj ešte funguje?

$$(A) \frac{6}{125,000} \int_0^{20} \int_0^{20} (50 - x - y) dy dx$$

$$(B) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$$

$$(C) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$$

$$(D) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$$

$$(E) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$$



Príklad 3: Maximum a minimum

- Nech (X, Y, Z) je náhodný vektor, ktorého zložky sú nezávislé s rovnomerným rozd. na intervale $(0, 1)$.
- Vygenerované realizácie takýchto náhodných čísel:

X	Y	Z	
0,4753	0,9789	0,4769	
0,8248	0,0352	0,1941	
0,0278	0,5218	0,2439	
0,6702	0,5615	0,9066	
0,0552	0,2787	0,6463	
0,0519	0,3529	0,5923	
0,2148	0,6593	0,2388	



Príklad 3: Maximum a minimum

Vypočítame minimum a maximum:

	A	B	C	D	E	
1	X	Y	Z	minimum	maximum	
2	0,4753	0,9789	0,4769	0,4753	0,9789	
3	0,8248	0,0352	0,1941	0,0352	0,8248	
4	0,0278	0,5218	0,2439	0,0278	0,5218	
5	0,6702	0,5615	0,9066	0,5615	0,9066	



Príklad 3: Maximum a minimum

- Ukážeme: Ak X_1, \dots, X_n sú nezávislé náhodné premenné s distribučnou funkciou G , tak distribučná funkcia náhodného vektora $(\min\{X_1, \dots, X_n\}, \max\{X_1, \dots, X_n\})$ je

$$F(x, y) = [G(y)]^n - [G(y) - G(x)]^n$$

pre $x < y$.



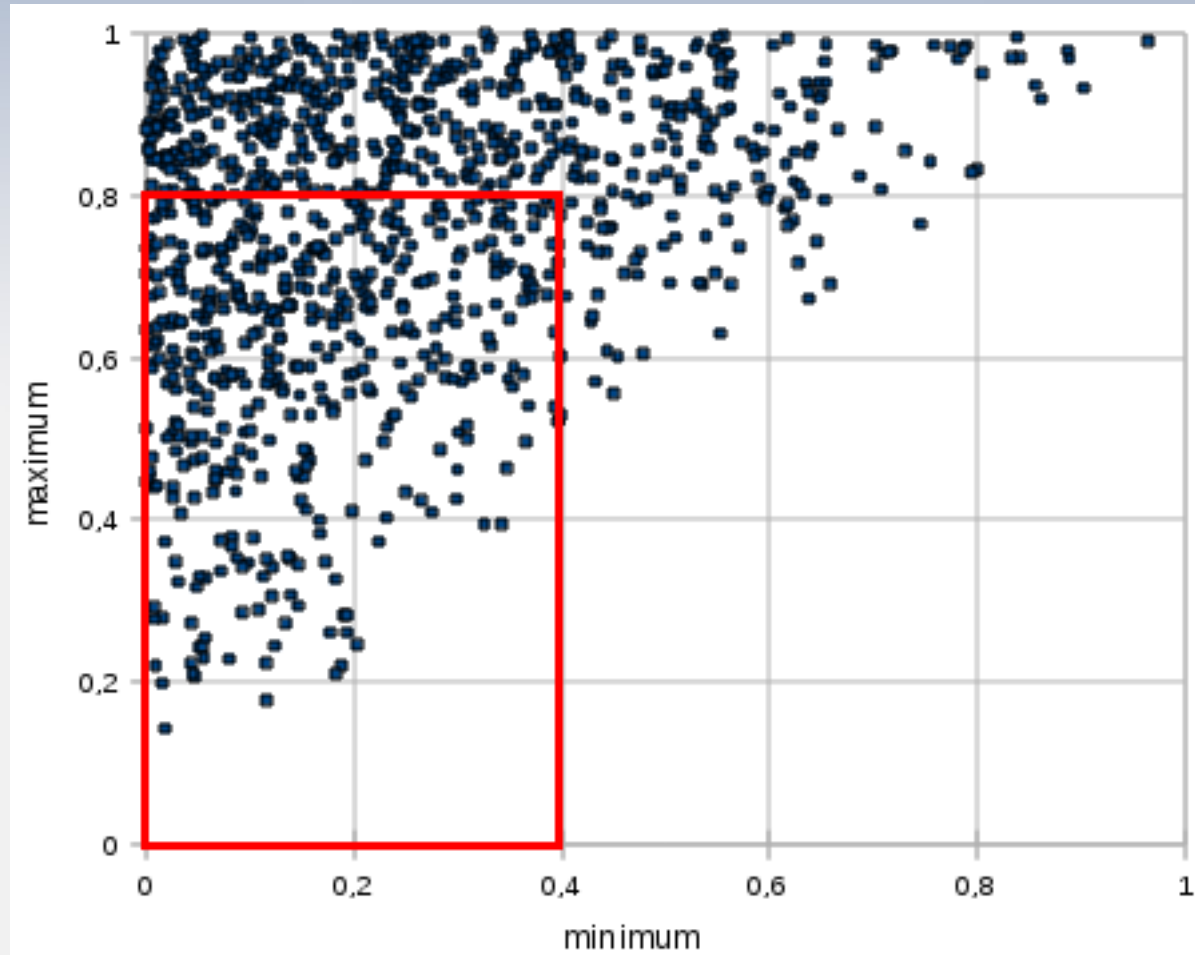
Príklad 3: Maximum a minimum

- Úloha (a): Aká je združená distribučná funkcia minima a maxima pre náš prípad troch náhodných premenných z rovnomerného rozdelenia na $(0,1)$?
- Úloha (b): Aká je v našom prípade pravdepodobnosť, že minimum je menšie ako 0,4 a maximum je menšie ako 0,8?



Príklad 3: Maximum a minimum

- Porovnáme s počtom takých hodnôt v simuláciách
- Zaujíma nás teda podiel bodov v červenej oblasti

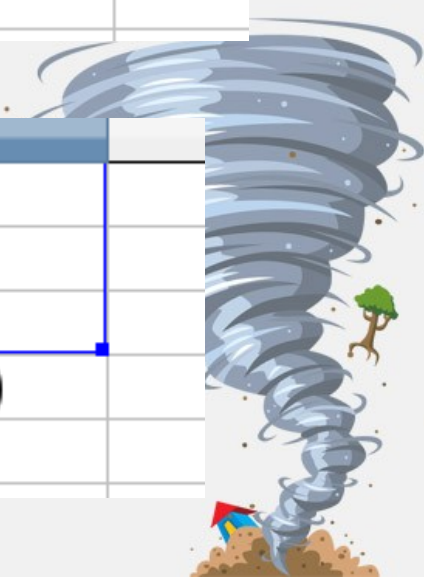


Príklad 3: Maximum a minimum

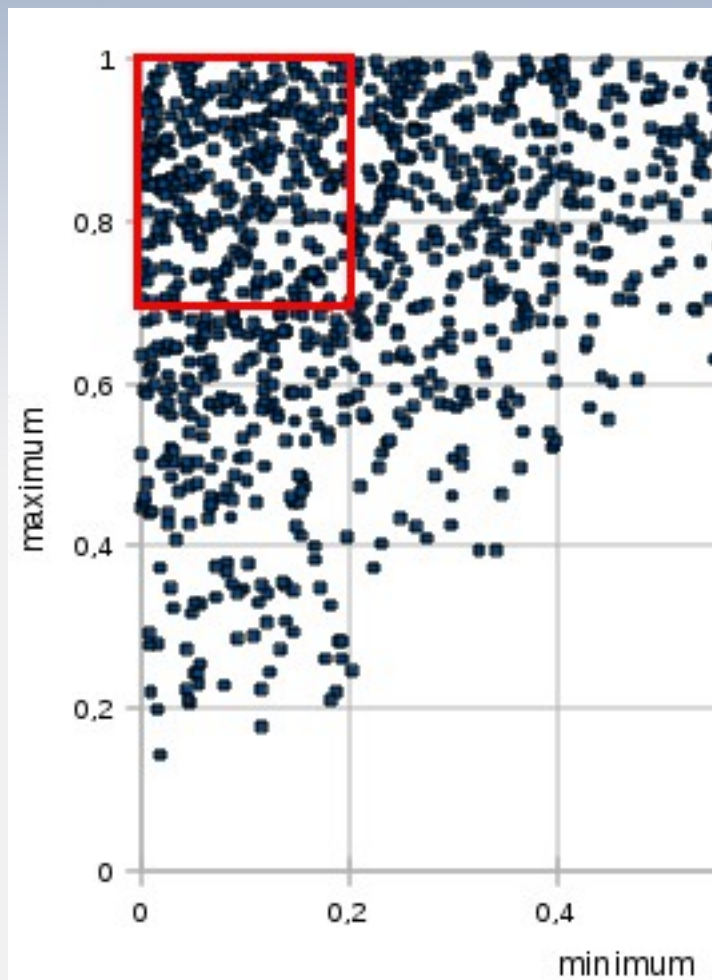
- Sčítame hodnoty v stĺpci F:

	D	E	F
	minimum	maximum	či je min<0,4 a max<0,8
	0,4753	0,9789	$= (D2 < 0,4) * (E2 < 0,8)$
	0,0352	0,8248	0
	0,0278	0,5218	1
	0,5615	0,9066	0

	D	E	F
	0,0057	0,8135	0
	0,1799	0,9778	0
	0,1794	0,8416	0
		počet	=SUM(F2:F1001)
		podiel zo všetkých	0,447



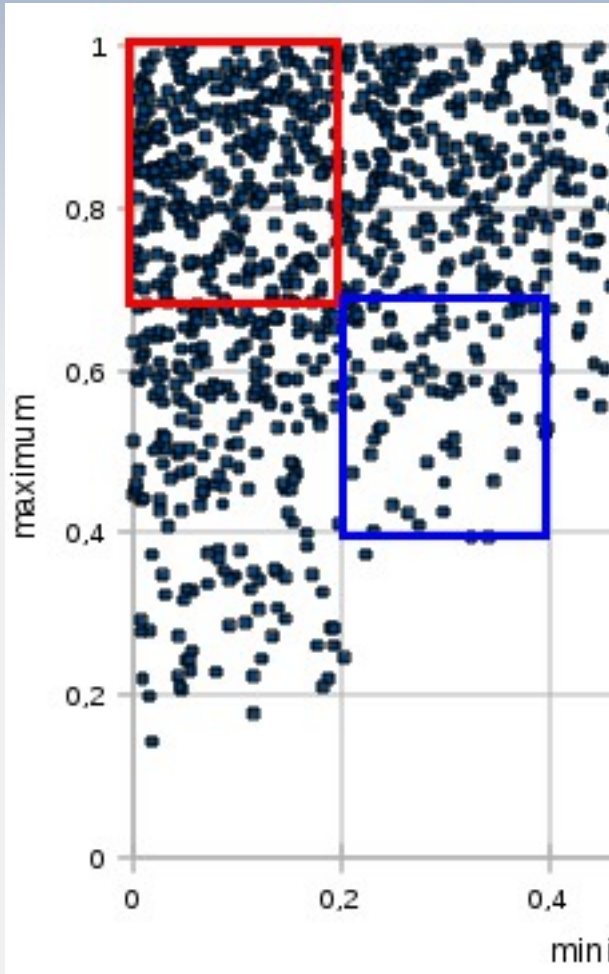
Príklad 3: Maximum a minimum



- Úloha (c): Aká je pravdepodobnosť, že maximum je väčšie ako 0,7 a minimum je menšie ako 0,2?



Príklad 3: Maximum a minimum



- Úloha (d): Splnenie ktorej podmienky má väčšiu pravdepodobnosť?
 - podm. z predch. úlohy
 - max. je z intervalu (0,4; 0,7) a min. je z intervalu (0.2; 0.4)



Príklad 4 (SOA): Tornádo

- Poistovňa analyzuje škody spôsobené tornádom:
 - X je časť poistného plnenia zodpovedajúca škodám na dome
 - Y je časť poistného plnenia zodpovedajúca škodám na ostatnom majetku
 - môžu byť ešte ďalšie časti plnenia
 - teda X, Y sú z intervalu $[0, 1]$ a platí $X + Y < 1$



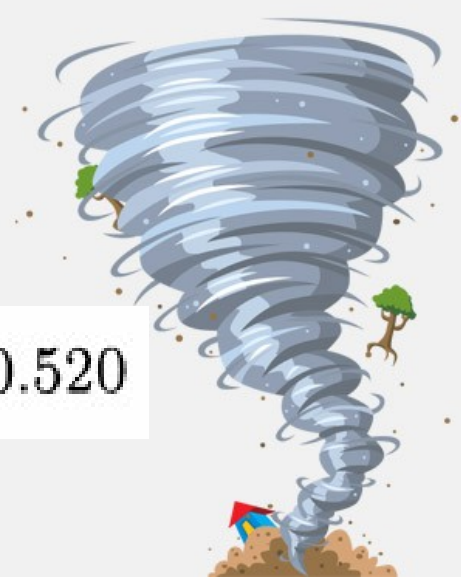
Príklad 4 (SOA): Tornádo

- Združená hustota (X, Y) je

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1 - (x + y)) & \text{pre } x > 0, y > 0, x + y < 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Aká je pravdepodobnosť, že časť zodpovedajúca škodám na dome bude tvoriť menej ako 20 percent poistného plnenia?

(A) 0.360 (B) 0.480 (C) 0.488 (D) 0.512 (E) 0.520



Príklad 4 (SOA): Tornádo



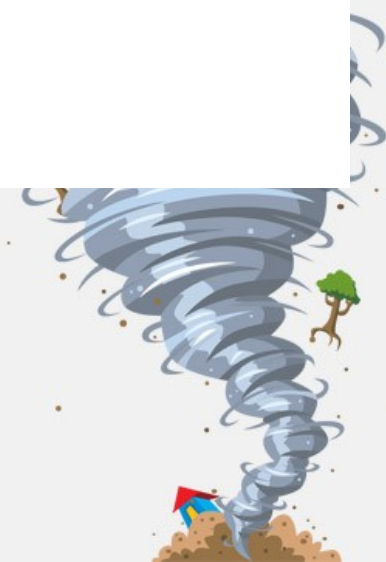
integrate 6*(1-x-y), y from 0 to 1-x, x from 0 to 0.2



Example

Definite integral:

$$\int_0^{0.2} \int_0^{1-x} 6(1-x-y) dy dx = 0.488$$



Príklad 5 (SOA): Najväčšia škoda

- Škody na domoch spôsobené vetrom sú nezávislé náhodné premenné s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{pre } x > 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

kde x je škoda v tisícoch.

- Hlásené boli 3 poškodené domy.
- Aká je stredná hodnota najvyššej škody?

(A) 2025 (B) 2700 (C) 3232 (D) 3375 (E) 4500



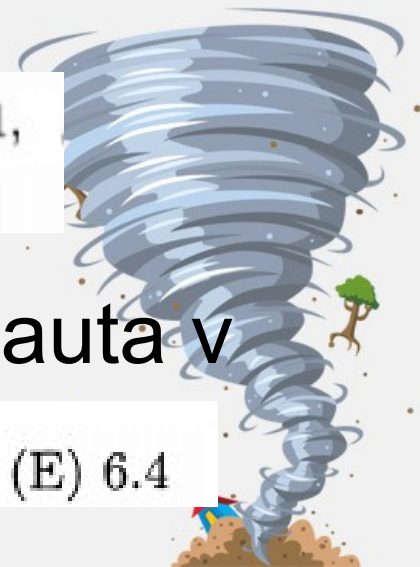
Príklad 6 (SOA): Automobily

- Poistenie automobilov, z dát o dopravných nehodách vieme:
 - Vek automobilu X
 - Čas nehody od zaplataenia ročného poistenia Y
 - Združené rozdelenie vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{64}(10 - xy^2) & \text{pre } 2 \leq x \leq 10 \text{ a } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Vypočítajte strednú hodnotu veku auta v nehode.

(A) 4.9 (B) 5.2 (C) 5.8 (D) 6.0 (E) 6.4



Príklad 7 (SOA): Spoluúčasť

- Poistenie:
 - Združené rozdelenie vektora škôd (X, Y) :

$$f(x, y) = 2x \quad \text{pre } 0 < x < 1 \text{ a } 0 < y < 1$$

- Spoluúčasť: 1
- Vypočítajte strednú hodnotu sumy vyplatenej poisťovňou.

(A) $1/4$ (B) $1/3$ (C) $1/2$ (D) $7/12$ (E) $5/6$



Príklad 8: Automobily II.

- Vrátime na k príkladu 6:
 - Vek automobilu X
 - Čas nehody od zaplattenia ročného poistenia Y
 - Združené rozdelenie vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{64}(10 - xy^2) & \text{pre } 2 \leq x \leq 10 \text{ a } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Vypočítajte hustotu veku auta v nehode a nakreslite jej graf. Čo z neho vidíme?



Príklad 9 (SOA): Požiare

- Po nahlásení požiaru poisťovňa:
 - Spraví predbežný odhad poistného plnenia X
 - Označme skutočne vyplatenú sumu Y
 - Združené rozdelenie vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)}, \quad x > 1, y > 1.$$

- Za predpokladu, že predbežný odhad je 2, vypočítajte pravdepodobnosť, že vyplatená suma bude medzi 1 a 3.

(A) 1/9 (B) 2/9 (C) 1/3 (D) 2/3 (E) 8/9



Príklad 10: Tornádo II.

- Z príkladu 4: hustota (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1 - (x + y)) & \text{pre } x > 0, y > 0, x + y < 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

kde X je podiel poistného plnenia zodpovedajúci škode na dome a Y škode na inom majetku

- Za podmienky, že škoda na dome tvorí 30 percent plnenia, nájdite pravdep., že škody na inom majetku tvoria viac ako 50 percent.

