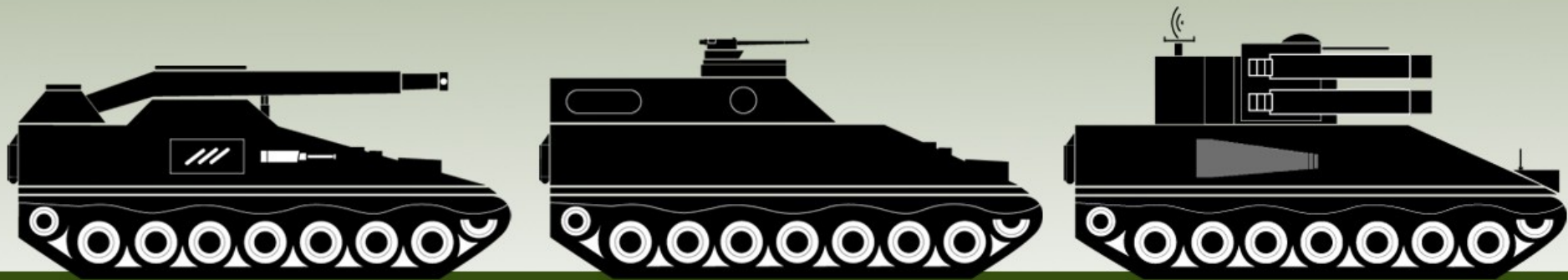


Odhadovanie parametrov

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova



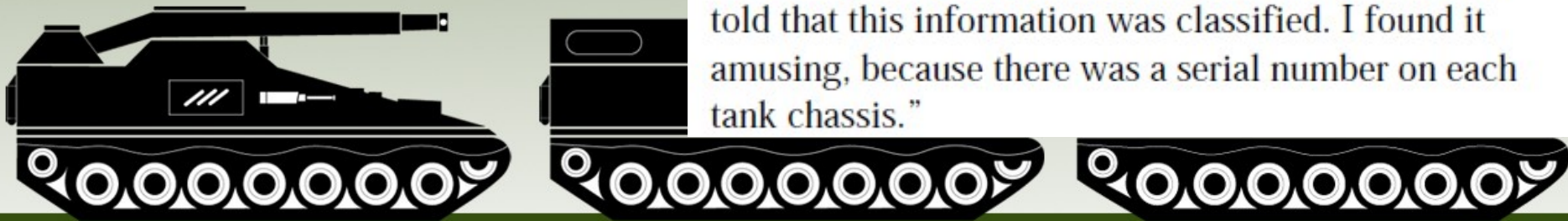
Minulý týždeň

- Odhadovanie počtu tankov z pozorovaných výrobných čísel
- Odhadovanie počtu taxíkov v meste



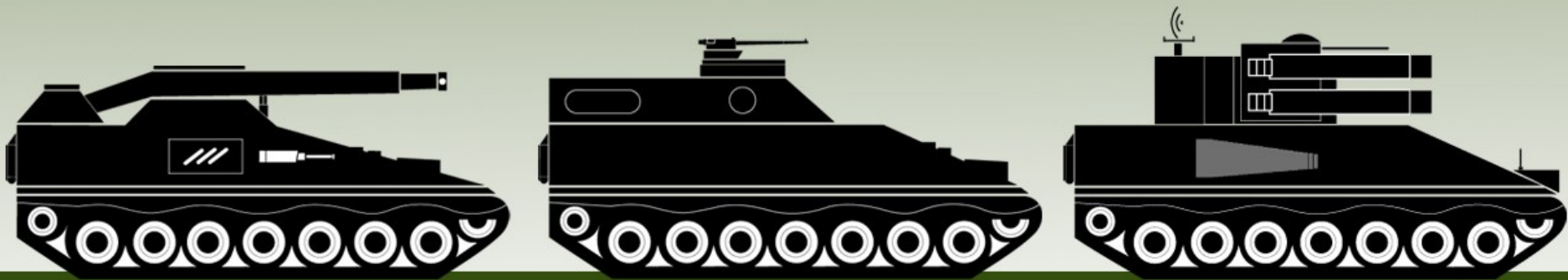
We close with an anecdote of Colonel Trevor Dupuy (1991). “In the Middle East a few years ago I was given permission by

Israeli military authorities to go through the entire Merkava Tank production line. At one time I asked how many Merkavas had been produced, and I was told that this information was classified. I found it amusing, because there was a serial number on each tank chassis.”



Minulý týždeň

- Bonusová domáca úloha:
 - Vo vrecku sú čísla 1, 2, ..., N
 - S návratom náhodne vyberieme niekoľko z nich: **50, 39, 19, 55, 13, 29**
 - Po diskusii ďalšie: **30, 31, 29**
 - Úlohou je odhadnúť celkový počet papierikov



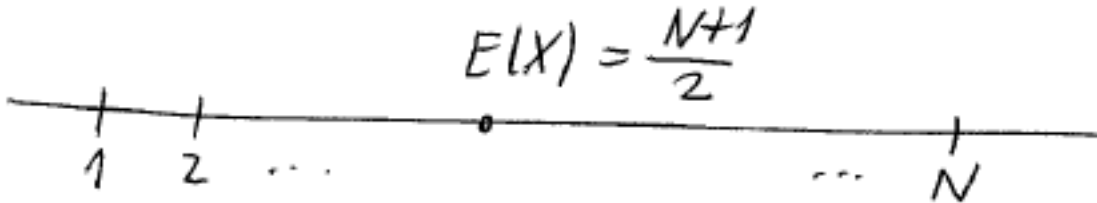
Odhadovanie parametrov

- Štatistická formulácia
 - Číslo na vytiahnutom lístku je náhodná premenná s hodnotami $1, 2, \dots, N$, pričom každá z nich má pravd. $1/N$
 - Tieto náhodné premenné sú nezávislé, tvoria teda náhodný výber z uvedeného rozdelenia
 - Úloha: odhadnúť hodnotu parametra N



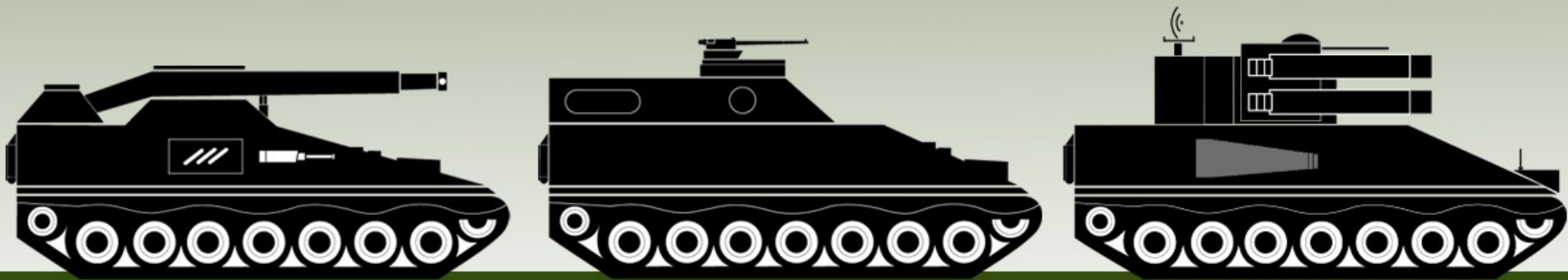
Návrhy, nápady, otázky, ...

- Prvý odhad:



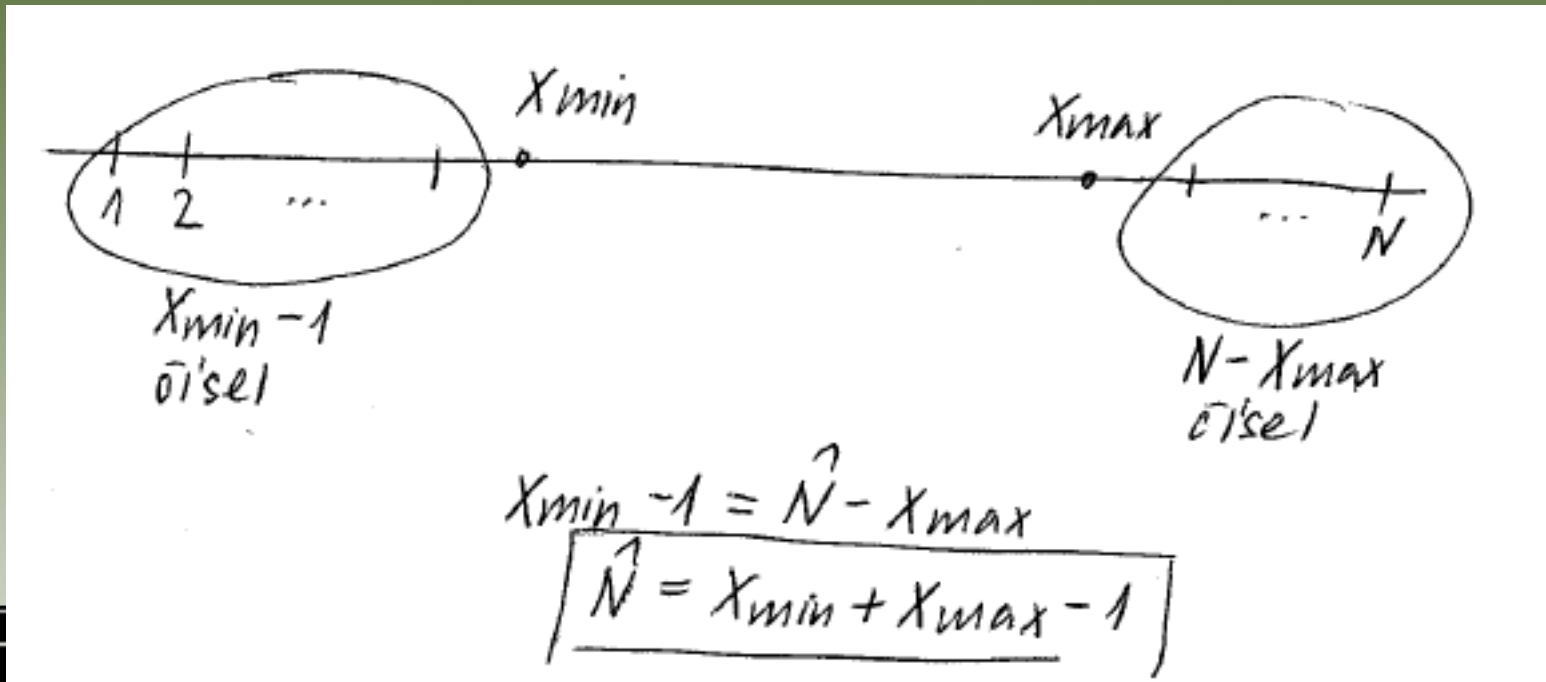
$E(X) = \frac{N+1}{2}$

$\bar{X} = \text{odhad } E(X) \Rightarrow \bar{X} = \frac{N+1}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{N} = 2\bar{X} - 1}$



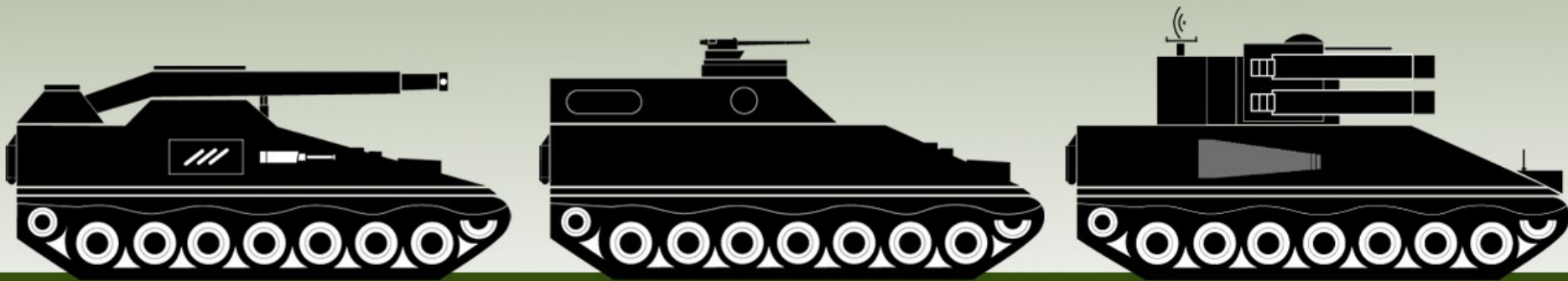
Návrhy, nápady, otázky, ...

- Druhý odhad:



Návrhy, nápady, otázky, ...

- Otázka na cvičení:
 - Nestačí nám informácia o najvyššom vytiahnutom čísle?
- To by znamenalo nejaký odhad v tvare **$X_{max} + c$** alebo **$X_{max} * c$**
- Návrh z DÚ: **$X_{max} * (n+1)/n$**



Nevychýlenosť odhadu

- Aké vlastnosti by mal mať „dobrý odhad“?
- Nevychýlenosť odhadu:
 - máme náhodný výber – nezávislé náhodné premenné s rovnakým rozdelením
 - definícia nevychýlenosti: *stredná hodnota odhadu sa rovná skutočnej hodnote parametra*
 - teda „v priemere dostávame správnu hodnotu“



Pomocné výpočty

- Středná hodnota minima:



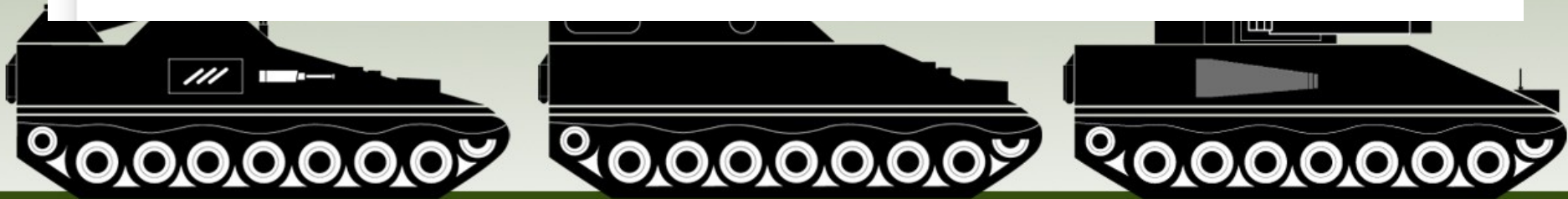
sum(k*(-(N-k)^9+(N-k+1)^9)/N^9), k from 1 to N



Examples Random

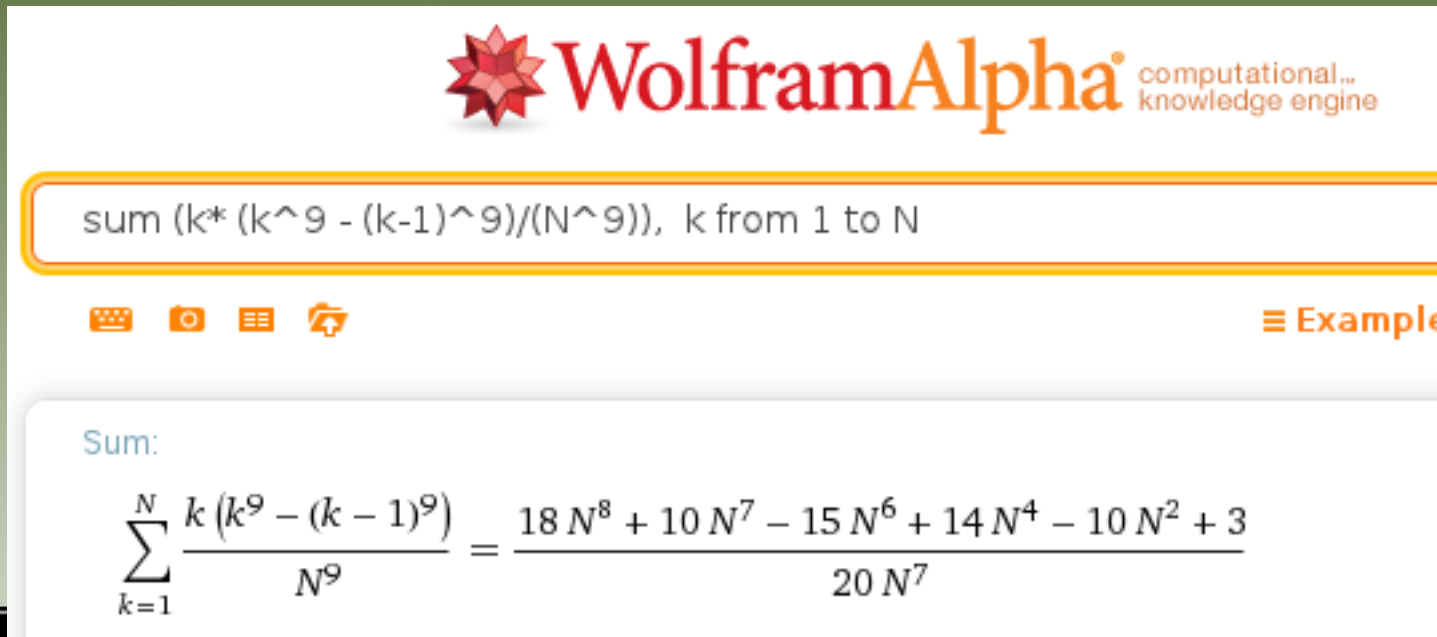
Sum:

$$\sum_{k=1}^N \frac{k((-k+N+1)^9 - (N-k)^9)}{N^9} = \frac{(N+1)^2(2N^6 + 6N^5 + N^4 - 8N^3 + N^2 + 6N - 3)}{20N^7}$$

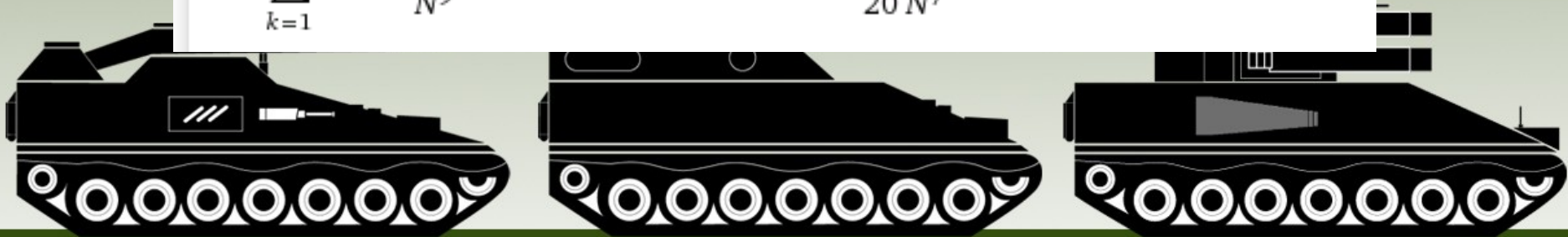


Pomocné výpočty

- Středná hodnota maxima:



The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top is the logo "WolframAlpha" with the tagline "computational... knowledge engine". Below the logo is a search bar containing the input: $\text{sum } (k * (k^9 - (k-1)^9) / (N^9)), k \text{ from } 1 \text{ to } N$. Below the search bar are several icons for actions like search, camera, and share. To the right of the icons is a button labeled "Example". Below the search bar, the result is displayed under the heading "Sum:". The result is a mathematical equation:
$$\sum_{k=1}^N \frac{k (k^9 - (k-1)^9)}{N^9} = \frac{18 N^8 + 10 N^7 - 15 N^6 + 14 N^4 - 10 N^2 + 3}{20 N^7}$$



Pomocné výpočty

- Roznásobíme:

```
(%i1) expand(((N^2+2*N+1)*(2*N^6+6*N^5+N^4-8*N^3+N^2+6*N-3))/(20*N^7));
```

```
(%o1) 
$$\frac{N}{10} + \frac{3}{4N} - \frac{7}{10N^3} + \frac{1}{2N^5} - \frac{3}{20N^7} + \frac{1}{2}$$

```

```
(%i2) expand((18*N^8+10*N^7-15*N^6+14*N^4-10*N^2+3)/(20*N^7));
```

```
(%o2) 
$$\frac{9N}{10} - \frac{3}{4N} + \frac{7}{10N^3} - \frac{1}{2N^5} + \frac{3}{20N^7} + \frac{1}{2}$$

```

