

Chí kvadrát test dobrej zhody

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova



Test dobrej zhody I.

- Chceme overiť, či naše dáta pochádzajú z konkrétneho pravdep. rozdelenia
- Napríklad:
 - Je kocka pravidelná? Padá na nej 1, ..., 6 rovnako často?
 - Je pravdepodobnosť narodenia chlapca a dievčaťa rovnaká?



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

- Môžeme kocku považovať za pravidelnú?
- Výsledky zo 600 hodov:

padnuté číslo	početnosť
1	85
2	99
3	91
4	108
5	119
6	98



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

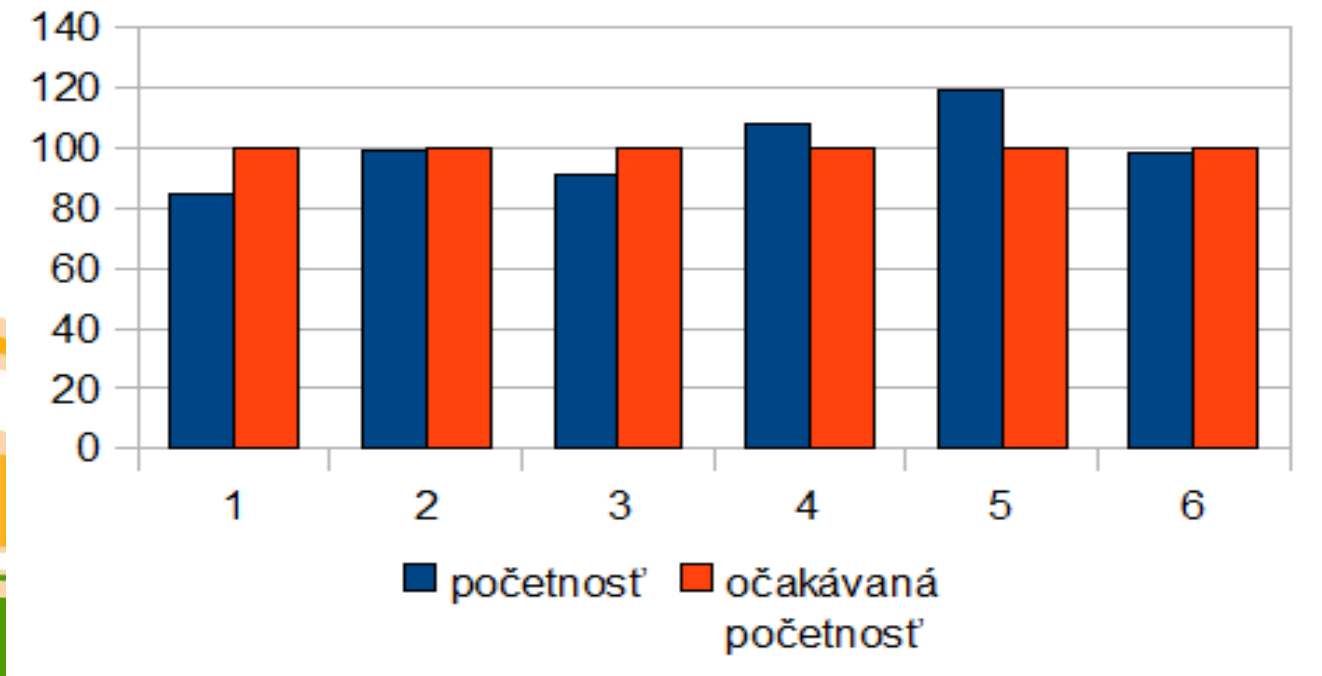
- Aké sú očakávané početnosti:

	A	B	C	D
1	padnuté číslo	početnosť	teoretická pravd.	očakávaná početnosť
2	1	85	0,1667	=+C2*\$B\$9
3	2	99	0,1667	100
4	3	91	0,1667	100
5	4	108	0,1667	100
6	5	119	0,1667	100
7	6	98	0,1667	100
8				
9	spolu	600		



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

- Aké sú skutočné a očakávané početnosti:



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

- Aké rozdiely skutočných a očakávaných početností:

početnosť	teoretická pravd.	očakávaná početnosť	početnosť – očakávaná
85	0,1667	100	-15
99	0,1667	100	-1
91	0,1667	100	-9
108	0,1667	100	8
119	0,1667	100	19
98	0,1667	100	-2



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

- Kladné a záporné odchýlky sa nemôžu navzájom zrušiť
- Rozdiel -15 nemá rovnakú váhu, keď je očakávaný počet 100 a keď je 1000

	D	E	F
1	očakávaná početnosť	početnosť – očakávaná	$(\text{početnosť} - \text{očakávaná})^2 / (\text{očakávaná})$
2	100	-15	$=+(E^2)/D$
3	100	-1	0,01
4	100	-9	0,81
5	100	8	0,64
6	100	19	3,61
7	100	-2	0,04

Príklad 1: Pravidelnosť kocky

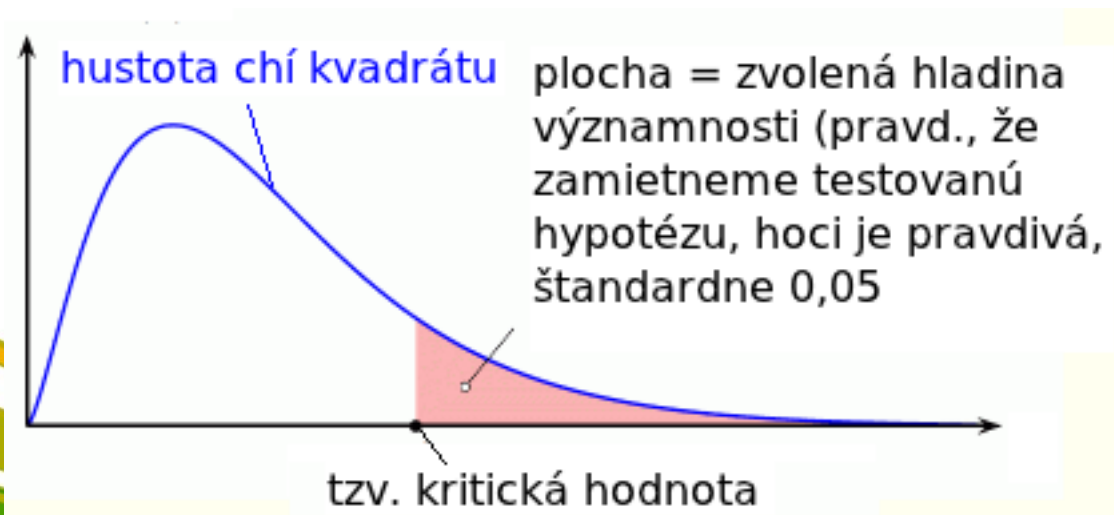
- „Mierou rozdielu“ medzi dátami a testovaným rozdelením bude súčet týchto rozdielov
- Ak bude veľký, hypotézu zamietneme

	E	F
tnosť	početnosť – očakávaná	$(\text{početnosť} - \text{očakávaná})^2 / (\text{očakávaná})$
	-15	2,25
	-1	0,01
	-9	0,81
	8	0,64
	19	3,61
	-2	0,04
	spolu	=SUM(F2:F7)



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

- Čo znamená „veľký“:
 - Väčší ako kvantil chí kvadrát rozdelenia s $q-1$ stupňami voľnosti, kde q je počet skupín, do ktorých sú dáta zaradené (teraz teda $q=6$)
 - Test sa dá použiť, ak je očakávaný počet dát v každej skupine aspoň 5



Príklad 1: Pravidelnosť kocky

- Kvantil, tzv. kritická hodnota:
 - Funkcia **CHINV**(hladina významnosti; stupne voľnosti)
 - Alebo z tabuľky (všade je hladina význ. 0,05)

spolu	7,36
kritická hodnota	=CHINV(0,05;5)

stupne voľnosti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kritická hodnota	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31

- Pravidelnosť kocky nezamietame.



Príklad 2: Weldonov pokus

- Walter F. L. Weldon (1860 – 1906)
 - Hodil 12 kockami, zopakoval to 26 306 krát
 - Úspech – padnutie 5 alebo 6
 - Teoretická pravdepodobnosť $1/3$
 - Prakticky vyššia početnosť, pripisoval to konštrukcii bodiek, ktorá ovplyvňovala váhu stien
- Budeme testovať hypotézu, že počet úspechov je $\text{Bin}(12, 1/3)$



Príklad 2: Weldonov pokus

- Weldonove výsledky v tabuľke
- Známe mená zo štatistiky:
 - Weldon poslal dáta v liste **Galtonovi**
 - Analyzoval ich aj **Pearson**, ktorý v r. 1900 navrhol práve tento chí kvadrát dobrej zhody

úspechov	početnosť
0	185
1	1149
2	3265
3	5475
4	6114
5	5194
6	3067
7	1331
8	403
9	105
10	14
11	4
12	0
spolu	26306

Príklad 2: Weldonov pokus

- Očakávané početnosti – ako sa počítajú?
- Ako bude pokračovať testovanie?

úspechov	početnosť	očakávaná početnosť	
0	185	202,75	
1	1149	1216,5	
2	3265	3345,37	
3	5475	5575,61	
4	6114	6272,56	
5	5194	5018,05	
6	3067	2927,2	
7	1331	1254,51	
8	403	392,04	
9	105	87,12	
10	14	13,07	treba zlúčiť na "10 a viac" kvôli požiadavke na očakávaný počet
11	4	1,19	
12	0	0,05	
spolu	26306		

Test dobrej zhody II.

- Druhá situácia:
 - Máme len typ rozdelenia, ktoré chceme testovať, ale už nie jeho parameter/parametre
- Znovu počítame súčet

$$\Sigma (\text{početnosť} - \text{očakávaná})^2 / (\text{očakávaná})$$

- pričom parametre sa odhadnú tak, aby tento súčet bol čo najmenší
- počet stupňov voľnosti sa zníži o počet odhadovaných parametrov



Príklad 3: Futbal

Časté použitie Poissonovho rozdelenia:

- počet udalostí za určitý časový interval
- napríklad: **počet gólov v zápase**
- ukážeme si na príklade MS vo futbale 1998 (kvôli spracovaným dátam)
- novšie dáta ako alternatíva v DÚ



Príklad 3: Futbal

- Dáta:

počet gólov	početnosť
0	5
1	11
2	12
3	18
4	11
5	6
6	0
7	1
viac	0

- Ako (nejako rozumne) odhadnúť parameter Poissonovho rozdelenia?
- Prečo:
 - Ak bude pri tomto odhade štatistika menšia ako kritická hodnota, hypotézu nezamietneme
 - Alebo ako štartovacia aproximácia



Príklad 3: Futbal

- Ak bude pri tomto odhade štatistika menšia ako kritická hodnota, hypotézu nezamietneme:*

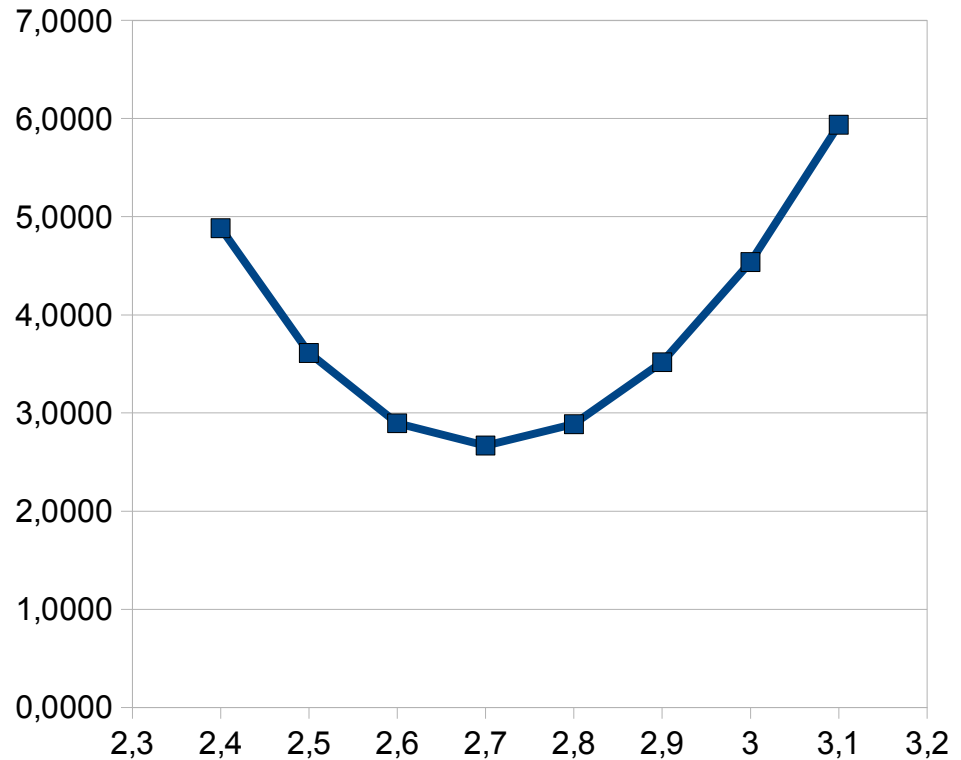
počet gólov	početnosť	pravdep.	očakávaná	
0	5	0,07	4,49	0,0571
1	11	0,19	11,94	0,0734
2	12	0,25	15,85	0,9362
3	18	0,22	14,04	1,1196
4	11	0,15	9,32	0,3025
5 a viac	7	0,13	8,36	0,2217
spolu	64	1	64	2,7105
	lambda	2,6563	odhadnutá ako priemer	štatistika pri tejto lambde

Ak je teraz štat. menšia, tak bude aj pri optimálnej lambde



Príklad 3: Futbal

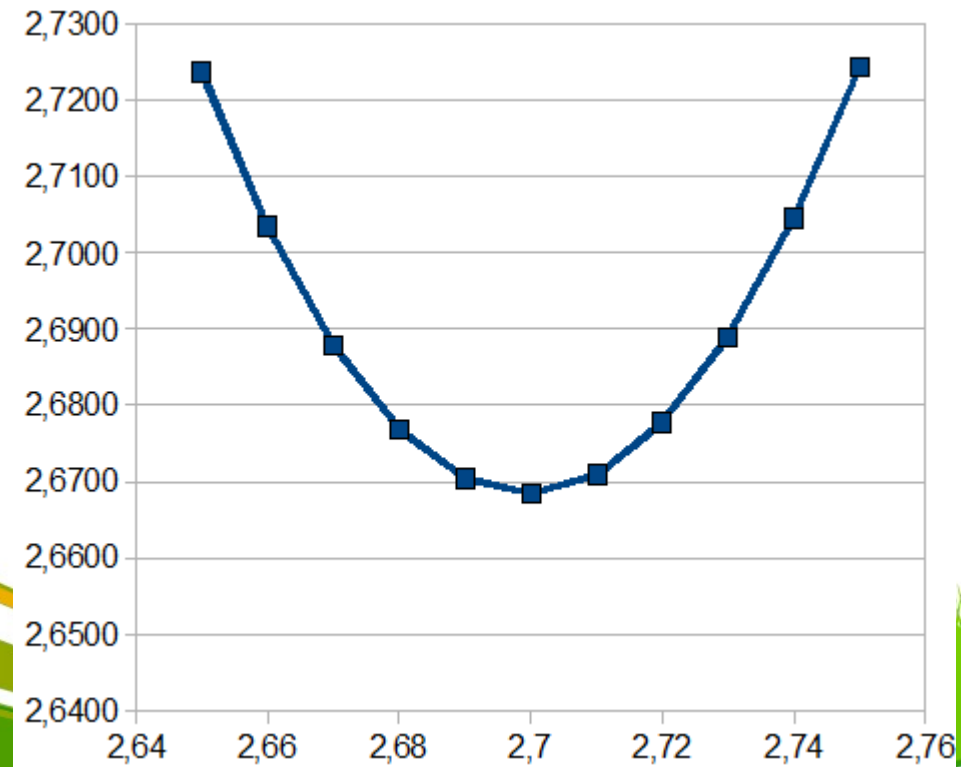
- ... *štartovacia aproximácia*:
 - x-ová os: parameter lambda
 - y-ová os: štatistika
- Na akom intervale to kresliť? Skúsme okolo tohto štartovacieho odhadu:



Príklad 3: Futbal

- ... *štartovacia aproximácia*:
 - Môžeme teraz zúžiť interval:

– Alebo použiť nejakú numerickú optimalizačnú metódu



Domáca úloha zo štatistiky

- Chí kvadrát test dobrej zhody použitý na reálne dáta
- Možnosť I.
 - Testovanie rozdelenia so známymi parametrami
 - Napríklad: je rozdelenie farieb lentiliek, M&M's, gumených medvedíkov, v balíčkoch rovnomerné?



Domáca úloha zo štatistiky

- Možnosť II.
 - Testovanie rozdelenia s neznámymi parametrami
 - Napríklad: má rozdelenie počtu gólov vo futbalových alebo hokejových zápasoch v zvolenej lige alebo turnaji Poissonovo rozdelenie?
- Vypracovanie samostatne alebo v skupine (dvojica alebo trojica)
- Každý/každá skupine pracuje s inými dátami

