

① zoberme $K=20$

hustota Y (shoda) za podm. X (predbežný odhad) = 20 :

$$f(y|X=20) = \frac{f(20,y)}{\int_1^{\infty} f(20,y) dy} = \frac{\frac{2}{20^2(20-1)} y^{-\frac{2 \cdot 20 - 1}{20-1}}}{\int_1^{\infty} \frac{2}{20^2(20-1)} y^{-\frac{39}{19}} dy} =$$

$$= \frac{y^{-\frac{39}{19}}}{\left[\frac{y^{-\frac{39}{19} + 1}}{-\frac{39}{19} + 1} \right]_1^{\infty}} = \frac{y^{-\frac{39}{19}}}{-\frac{19}{20}(0-1)} = \frac{20}{19} y^{-\frac{39}{19}}$$

stredná hodnota = $\int_1^{\infty} y \cdot \frac{20}{19} y^{-\frac{39}{19}} dy = \frac{20}{19} \int_1^{\infty} y^{-\frac{20}{19}} dy =$

$$= \frac{20}{19} \left[\frac{y^{-\frac{20}{19} + 1}}{-\frac{20}{19} + 1} \right]_1^{\infty} = \frac{20}{19} \frac{1}{-\frac{1}{19}} (0-1) = \underline{\underline{20}}$$

② $X_i =$ počet bodov za i -tu otázku, $E(X_i) = p_i$, $\text{Var}(X_i) = p_i(1-p_i)$
 $X = X_1 + \dots + X_{20}$

$$E(X) = p_1 + \dots + p_{20} = 14$$

$$\text{Var}(X) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{nezávislosť } X_1, \dots, X_{20}}}{=} \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_{20}) = \underbrace{p_1 + \dots + p_{20}}_{14} - \underbrace{(p_1^2 + \dots + p_{20}^2)}_{20 \text{ členov}} \rightarrow \text{max}$$

$$14^2 = (p_1 + \dots + p_{20})^2 = (1 \cdot p_1 + \dots + 1 \cdot p_{20})^2 \leq \underbrace{(1^2 + \dots + 1^2)}_{20 \text{ členov}} (p_1^2 + \dots + p_{20}^2) =$$

Cauchyho nerovnosť
 rovnosť $\Leftrightarrow p_k = c \cdot 1$ t.j.
 c-konst.

$$= 20(14 - \text{Var}(X))$$

z podm. $E p_k = 14$: $p_k = \frac{14}{20} = 0,7$ t.j.

$$\text{Teda } \text{Var}(X) \leq 14 - \frac{14^2}{20}$$

norma' obmedzenie
 pre varianciu, kt. sa nachádza $\Leftrightarrow p_k = 0,7$ t.j.

záver:

keďže má zvoliť $p_k = 0,7$ t.j. t.j. všetky otázky rovnako ťažké; pričom je splnená podm. na strednú hodnotu bodov